Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202_

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

ОПК-1: владением широкой общей подготовкой (базовыми знаниями) для решения практических задач в области информационных систем и технологий;

ОПК-1.1: Использует знания математики, физики, вычислительной техники и программирования при решении задач профессиональной деятельности;

ОПК-1.2: Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования;

ОПК-1.3: Проводит теоретические и экспериментальные исследования объектов профессиональной деятельности.

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

- список рекомендованной литературы;
- наименования лекционных разделов курса;
- темы практических работ работ;
- теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную

информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Случайные события	31
Случайные величины	38,8
	69,8

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета; - обратите особое внимание на цвет

	гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными

	буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена, соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Теория информационных процессов и систем»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202_

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

ОПК-1: владением широкой общей подготовкой (базовыми знаниями) для решения практических задач в области информационных систем и технологий;

ОПК-1.1: Использует знания математики, физики, вычислительной техники и программирования при решении задач профессиональной деятельности.

ОПК-1.2: Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.

ОПК-1.3: Проводит теоретические и экспериментальные исследования объектов профессиональной деятельности.

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Теория информационных процессов и систем» по специальности 09.03.02 «Информационные системы и технологии»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную

информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Теория создания информационных процессов для различных направлений	6
Классификация информационных систем	5
Основные этапы проектирования систем	6
Основы построения сложных проектов информационных систем	4
Декомпозиция и агрегация информационных систем	4
Агрегатное описание информационных систем	6
Агрегат как случайный процесс; информация и управление	5
Возможности использования общей теории систем в практике проектирования информационных систем	4
Моделирование систем обучения, творчества и научного поиска	4
Выбор инструментальной среды моделирования	4
Понятие информационной системы; системный анализ	4
	52

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета; - обратите особое внимание на цвет

	гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными

	буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена, соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Администрирование информационных систем»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202_

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- ПК-1.1: Осуществляет анализ требований к программному обеспечению
- ПК-1.2: Осуществляет разработку технических спецификаций на программные компоненты и их взаимодействие
- ПК-1.3: Проводит проектирование программного обеспечения
- ПК-2.1: Анализирует и разрабатывает бизнес-требования к системе; осуществляет выбор методов и средств проектирования информационных систем разного масштаба и уровня сложности
- ПК-2.2: Представляет концепции технического задания на систему и согласовывает требования к системе; организует концептуальное проектирование информационной системы
- ПК-2.3: Осуществляет постановку задачи на разработку требований к подсистемам системы и проводить контроль их качества

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную

информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Жизненный цикл программных систем	12
Методы управления проектами при разработке программных систем	15
Методы проектирования программных систем	12
Модульный подход к программированию	15
Структурный подход к программированию	15
Объектно-ориентированный подход к программированию	12
Декларативный подход к программированию	15
Параллельное программирование	12
Case-технологии разработки программных систем	15
Доказательное программирование	15
	138

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета; - обратите особое внимание на цвет

	гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными

	буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена, соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Алгоритмы и структуры данных»

Специальность 09.03.02 Информационные системы и технологии

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

— Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Алгоритмы и структуры данных» по специальности 09.03.02 «Информационные системы и технологии»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;

– наименования лекционных разделов курса;

– темы практических работ работ;

– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Численные методы». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке. Режим доступа: ntb.donstu.ru

Лабораторная работа № 1
«СОРТИРОВКА»

Цель работы: получение навыков использования различных сортировок.
Форма отчета: демонстрация выполненной работы преподавателю.

Задание.

В этом разделе массив целых или действительных чисел $a_1...,a_n$ требуется переставить так, чтобы они были упорядочены по неубыванию: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Эта задача называется задачей сортировки или упорядочения массива. Для решения этой задачи:

– заполнить массив из 20 элементов случайными числами с помощью функции rand;
– написать функции, реализующие предложенные ниже алгоритмы;
– оценить эффективность алгоритмов по числу операций сравнения и перемещения элементов.

1.1. Сортировка пузырьком. Пусть записи хранятся в массиве, расположенном вертикально. Записи с малыми значениями ключевого поля более "легкие" и "всплывают" вверх наподобие пузырька. Проход вдоль массива начинается снизу. Последовательным просмотром чисел $a_{n-1}...$, a_0 найти j такое, что $a_j < a_{j-1}$. Поменять местами a_j и a_{j-1} и возобновить просмотр с элемента a_{j-1} и т.д. Тем самым наименьшее число передвинется на первое место. Следующие проходы начинать опять с конца, уменьшая на единицу количество просматриваемых элементов. Массив будет упорядочен после просмотра, в котором участвовали только два последних элемента.

1.2. Улучшенная сортировка пузырьком. Нередко случается, что последние проходы сортировки простым обменом работают «вхолостую», так как элементы уже упорядочены. Один из способов улучшения алгоритма сортировки пузырьком состоит в том, чтобы запомнить, производился ли на очередном проходе какой-либо обмен. Если ни одного обмена не было, то алгоритм может закончить работу.

1.3. Шейкер-сортировка - это разновидность «пузырьковой сортировки», которая работает в две стороны: первый цикл доходит до левого конца массива и оставляет там наименьшее значение, сужая область сортировки в левой части; второй цикл доходит до правого конца и оставляет там самый «тяжелый» элемент, сужая область сортировки в правой части. Сортировка продолжается до тех пор, пока область не будет исчерпана.

1.4. Сортировка выбором. Условно разделить массив на отсортированную (левую) и несортированную (правую) части. Сначала весь массив — это несортированная часть. В правой части найти элемент массива, имеющий наименьшее значение, произвести обмен этого значения со значением на первой неотсортированной позиции (тем самым расширяя левую часть).

1.5. Сортировка вставками. Разделим условно все элементы массива на две последовательности: на отсортированную (левую) последовательность $a_0...$, a_{i-1}, и несортированную (правую) часть $a_i,...,a_{n-1}$. В алгоритме на каждом i-м шаге i-й элемент из правой части вставляется в подходящее место в левой части.

1.6. Сортировка Шелла. В методе Шелла сравниваются элементы, расположенные на расстоянии d (где d — шаг между сравниваемыми элементами). Если d = [n/2], то после каждого просмотра шаг d уменьшается вдвое. На последнем просмотре он сокращается до d = 1.

Контрольные вопросы

1. Что такое сортировка?
2. Перечислите виды сортировок.
3. Перечислите общие критерии оценки алгоритмов сортировки.
4. Перечислите достоинства и недостатки изученных методов сортировок.

Лабораторная работа № 2
«РЕКУРСИЯ»

Цель работы: получение навыков работы с рекурсией.

Форма отчета: демонстрация выполненной работы преподавателю.

Задание.

2.1. Описать рекурсивную функцию *pow(x,n)* от вещественного x ($x \neq 0$) и целого n, которая вычисляет величину x^n согласно формуле

$$x^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \dfrac{1}{x^{|n|}}, & n < 0 \\ x \cdot x^{n-1}, & n > 0 \end{cases}$$

2.2. Запрограммировать рекурсивный алгоритм вычисления квадрата натурального числа, используя рекуррентное соотношение

$$n^2 = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ (n-2)^2 + 4(n-2) + 4, & n > 1 \end{cases}$$

2.3. Написать рекурсивную функцию Fact2(n), вычисляющую значение двойного факториала от натурального числа n по формуле n!! = n (n-2) (n-4)... , где последний сомножитель в произведении равен 2, если n- четное число, и 1, если n- нечетное.

2.4. Рекурсивно описать функцию $C(m,n)$, где $0<=m<=n$, для вычисления биномиального коэффициента C_n^m по следующей формуле:

$C_n^0=C_n^n=1$; $C_n^m= C_{n-1}^m+ C_{n-1}^{m-1}$ при 0<m<n.

2.5. Запрограммировать рекурсивный алгоритм перемножения двух натуральных чисел, используя рекуррентное соотношение

$$a \cdot b = \begin{cases} b, & a = 1 \\ (a-1) \cdot b + b, & a > 1 \end{cases}$$

2.6. Даны натуральные числа n и m. Вычислить *A(n,m)*, где

$$A(n,m) = \begin{cases} m+1, & n = 0 \\ A(n-1,1), & n \neq 0, m = 0 \\ A(n-1), A(n,m-1), & \textit{иначе} \end{cases}$$

2.7.
```
int f(int n){
if (n>100) return n-10;
else return f(f(n+11));
};
int main(){
    printf ("f(%d)= %d\n",106,f(106)) ;
    printf ("f(%d)= %d\n",99,f(99)) ;
    printf ("f(%d)= %d\n",85,f(85)) ;
    return 0;
}
```
Вычислить f(106), f(99) и f(85). Какие вообще значения принимает эта функция?

2.8. Написать рекурсивную функцию, не используя операцию возведение в степень. Дано натуральное число n. Вывести слово yes, если число n является точной степенью двойки, или слово no в противном случае.

2.9. Определить минимальный элемент вектора x, используя рекурсивную функцию *min(x,k)*, находящую минимум среди последних элементов вектора x, начиная с k-го.

2.10. Вычислить рекурсивно сумму чисел от 1 до n по формуле $sum(n)=sum(n-1)+n$, где n - целое положительное число.

2.11. Вычислить рекурсивно сумму чисел от 1 до n, по формуле $sum(n)= sum(n,2)+sum(n-1,2)$, где n - целое положительное число, $sum(n,a,)=n+sum(n-a,a)$; $sum(1, 2)= 1$; $sum(2,2)=2$.

2.12. С клавиатуры вводится непустая последовательность положительных вещественных чисел, за которой следует отрицательное число. Описать рекурсивную функцию *sum* без параметров для нахождения суммы этих положительных чисел

2.13. Создать функцию, подсчитывающую сумму элементов массива по следующему алгоритму: массив делится пополам, подсчитываются и складываются суммы элементов в каждой половине. Сумма элементов в половине массива подсчитывается по тому же алгоритму, то есть снова путем деления пополам. Деления происходят, пока в получившихся кусках массива не окажется по одному элементу и вычисление суммы, соответственно, не станет тривиальным.

2.13. Описать рекурсивную функцию *digits* без параметров, которая:

a) подсчитывает количество символов в тексте, заданном во входном файле (за текстом следует точка).

b) подсчитывает количество цифр в тексте, заданном во входном файле (за текстом следует точка).

2.14. Дана последовательность ненулевых целых чисел, за которой следует 0. Напечатать сначала все отрицательные числа этой последовательности, а затем — все положительные (в любом порядке).

2.15. Описать рекурсивную функцию, которая методом деления отрезка пополам находит с точностью *eps* корень уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[a,b]$. (Считать, что $eps>0, a<b, f(a)\bullet f(b)<0$ и $f(x)$ – непрерывная и монотонная функция на отрезке $[a,b]$.)

2.16. Используя рекурсию и целочисленную арифметику (нельзя использовать циклы, строки, списки, массивы) решить следующую задачу. Дано число n, десятичная запись которого не содержит нулей. Получить новое число, в котором вначале находятся цифры, расположенные в нечетных позициях, а затем цифры, расположенные в четных позициях исходного числа. Если n=254631, то необходимо получить 243561. Функция должна возвращать целое число, являющееся результатом работы программы, выводить число по одной цифре нельзя.

Контрольные вопросы

1. Что такое рекурсия?
2. Приведите примеры рекурсии в различных отраслях знаний.
3. Что общего и в чем разница между циклическим и рекурсивным способами организации вычислений?
4. Объясните термины «база рекурсии» и «шаг рекурсии». Определите базу рекурсии и шаг рекурсии для своей задачи.
5. Что такое «рекурсивное зацикливание»? К каким последствиям оно приводит?
6. Каково главное ограничение при использовании рекурсии?
7. Что такое явная и косвенная рекурсии?
8. Оцените, от чего зависит глубина рекурсии в алгоритме решения вашей задачи.

Лабораторная работа № 3
«СТЕКИ»

Цель работы: освоить работу со стеками.

Форма отчета: демонстрация выполненной работы преподавателю.

Задание.

3.1. Создать стек из элементов символьного типа. Реализовать для этого стека основные операции:

создание стека;

a) печать (просмотр) стека;

b) добавление элемента в вершину стека;

c) извлечение элемента из вершины стека;

d) проверка пустоты стека;

e) очистка стека

3.2. Создать стек из случайных целых чисел, лежащих в диапазоне –50 до +50. Создать два результирующих стека. Первый из них должен содержать все элементы исходного стека с четными значениями, а во второй – с нечетными. Один из результирующих стеков может остаться пустым. Вывести значения вершин обоих стеков. Если стек пустой, то вывести null.

3.3. Создать стек из случайных целых чисел и преобразовать его в два стека, перемещая элементы из первого стека во второй, пока значение вершины первого стека не станет четным. Если в первом стеке нет элементов с четными значениями, то переместить из первого стека во второй все элементы. Вывести на экран значения вершин обоих стеков. Если первый стек пустой, то вывести null.

3.4. Создать стек из случайных целых чисел, лежащих в диапазоне –50 до +50 и преобразовать его в два стека. Первый только положительные числа, а второй – только отрицательные. Порядок следования чисел должен быть сохранен.

3.5 Создать стек из случайных целых чисел и удалить из него записи с четными числами.

3.6. Создать стек из случайных целых чисел и поменять местами крайние элементы.

3.7. Создать стек из случайных целых чисел и удалить из него каждый второй элемент.

Лабораторная работа № 4
«ОЧЕРЕДИ»

Цель работы: освоить работу с элементами очереди.

Форма отчета: демонстрация выполненной работы преподавателю.

Задание.

4.1. Создать очередь из элементов типа. Реализовать для этой очереди основные операции:

a) создание очереди;
b) печать (просмотр) очереди;
c) добавление элемента в конец очереди;
d) извлечение элемента из начала очереди;
e) проверка пустоты очереди;
f) очистка очереди.

4.2. Создать очередь из случайных целых чисел и преобразовать его в две очереди, переместив элементы из первой очереди во вторую N элементов. Если исходная очередь содержит менее N элементов, то перенести все элементы из исходной очереди в результирующую. Вывести на экран значения вершин обеих очередей. Вывести на экран null, если первая очередь стала пустой.

4.3. Создать 2 входные очереди с одинаковым количеством элементов. Создать результирующую очередь, в которой элементы из первой и второй очередей чередуются. Вывести на экран первый и последний элементы полученной очереди.

4.4. Создать очередь из случайных целых чисел и преобразовать его в две очереди, перемещая элементы из первой в конец второй, пока значение начального элемента первой очереди не станет четным. Если исходная очередь не содержит четных элементов, то перенести все элементы из первой очереди во вторую. Вывести на экран null, если первая очередь стала пустой.

4.5. Выполнить циклический сдвиг элементов в очереди так, чтобы в ее начале был расположен наибольший элемент.

4.6. Без использования дополнительных структур, кроме очереди, напечатать числа, вводимые с клавиатуры в следующем порядке: сначала - все числа, меньшие a, затем - все числа из отрезка [a,b], и наконец - все остальные числа, сохраняя исходный взаимный порядок в каждой из этих трех групп чисел (a и b - заданные числа a<b).

Контрольные вопросы

1. В чем преимущества и недостатки организации структур в виде стека?
2. В чем преимущества и недостатки организации структур в виде очереди?
3. Для моделирования каких реальных задач удобно использовать стек? А для каких очередь?
4. Какое значение хранит указатель на стек?
5. Какое значение хранит указатель на очередь?
6. С какой целью в программах выполняется проверка на пустоту стека и очереди?
7. В чем состоит существенное отличие между стеком и очередью?

Лабораторная работа № 5
«СПИСКИ»

Цель работы: освоить работу с элементами списка.
Форма отчета: демонстрация выполненной работы преподавателю.

Задание.
5.1. Создать простой список, упорядоченный по невозрастанию неотрицательных целых чисел. (Например, 12->10->9->7->3->NULL). Реализовать для этого списка основные операции:
a) создание списка;
b) печать (просмотр) списка;
c) вставка элемента в список;
d) удаление элемента из списка;
e) поиск элемента в списке
f) проверка пустоты списка;
g) удаление списка.

5.1. Описать функцию, которая по списку L строит два новых списка: E1 — из положительных элементов и E2 — из остальных элементов списка L (тип элемента - float].

5.2. Описать функцию, которая вставляет в список L новый элемент E1 за каждым вхождением элемента E.

5.3. Описать функцию, которая переворачивает список L, т. е. изменяет ссылки в этом списке так, чтобы его элементы оказались расположенными в обратном порядке.

Контрольные вопросы

1. Любой ли список является связным? Обоснуйте ответ.
2. В чем отличие первого элемента однонаправленного (двунаправленного) списка от остальных элементов этого же списка?
3. В чем отличие последнего элемента однонаправленного (двунаправленного) списка от остальных элементов этого же списка?
4. В чем принципиальные отличия выполнения основных операций в однонаправленных и двунаправленных списках?

Лабораторная работа № 6
«БИНАРНЫЕ ДЕРЕВЬЯ»

Цель работы: освоить работу с бинарными деревьями.
Форма отчета: демонстрация выполненной работы преподавателю.

Задание.
6.1. Реализуйте программу, в которой выполняются основные операции с бинарным деревом.
a) создание бинарного дерева;
b) печать бинарного дерева;
c) обход бинарного дерева;
d) вставка элемента в бинарное дерево;
e) удаление элемента из бинарного дерева;
f) проверка пустоты бинарного дерева;
g) удаление бинарного дерева.

По результатам работы программы вручную построить бинарное дерево из 10 узлов. Какова глубина дерева? Выполнить 3 обхода дерева. Дать характеристику дереву с точки зрения классификации.

6.2. Найти высоту (глубину) дерева, т.е. число уровней, на которых располагаются его вершины.

6.3. Найти количество четных элементов бинарного дерева. Укажите эти элементы и их уровни.

6.4. Найдите сумму элементов сбалансированного дерева, находящихся на уровне k.

7.5. Найти среднее значение элементов на заданном уровне непустого бинарного дерева.

6.6. Разработать алгоритм создания нового бинарного дерева, являющегося зеркальным отражением исходного (все левые поддеревья становятся правыми поддеревьями и наоборот).

6.7. Разработать алгоритм копирования бинарного дерева.

6.8. Оператор мобильной связи организовал БД абонентов, содержащую сведения о телефонах, их владельцах и используемых тарифах, в виде бинарного дерева. Составьте программу, которая:

– обеспечивает начальное формирование базы данных в виде бинарного дерева;
– производит вывод всей БД;
– производит поиск владельца по номеру телефона;
– выводит наиболее востребованный тариф (по наибольшему числу абонентов).

Контрольные вопросы

1. С чем связана популярность использования деревьев в программировании?
2. Можно ли список отнести к деревьям? Ответ обоснуйте.
3. Какие данные содержат адресные поля элемента бинарного дерева?
4. Может ли бинарное дерево быть строгим и неполным? Ответ обоснуйте.
5. Может ли бинарное дерево быть нестрогим и полным? Ответ обоснуйте.
6. Каким может быть почти сбалансированное бинарное дерево: полным, неполным, строгим, нестрогим? Ответ обоснуйте.
7. Чем отличаются, с точки зрения реализации алгоритма, прямой, симметричный и обратный обходы бинарного дерева?

Лабораторная работа № 7
«ХЕШИРОВАНИЕ ДАННЫХ»

Цель работы: освоить работу с хешированными данными.

Форма отчета: демонстрация выполненной работы преподавателю.

Задание.

7.1. Составьте хеш-таблицу, содержащую буквы и количество их вхождений во введенной строке. Вывести таблицу на экран. Осуществить поиск введенной буквы в хеш-таблице.

7.2. Постройте хеш-таблицу из слов произвольного текстового файла, задав ее размерность с экрана. Выведите построенную таблицу слов на экран. Осуществите поиск введенного слова. Выполните программу для различных размерностей таблицы и сравните количество сравнений. Удалите все слова, начинающиеся на указанную букву, выведите таблицу.

7.3. Постройте хеш-таблицу для зарезервированных слов, используемого языка программирования (не менее 20 слов), содержащую HELP для каждого слова. Выдайте на экран подсказку по введенному слову. Добавьте подсказку по вновь введенному слову, используя при необходимости реструктуризацию таблицы. Сравните эффективность добавления ключа в таблицу или ее реструктуризацию для различной степени заполненности таблицы.

7.4. В текстовом файле содержатся целые числа. Постройте хеш-таблицу из чисел файла. Осуществите поиск введенного целого числа в хеш-таблице. Сравните результаты количества сравнений при различном наборе данных в файле.

Указания к выполнению работы

Каждое задание необходимо решить в соответствии с изученными алгоритмами хеширования данных, реализовав программный код на языке С. Рекомендуется воспользоваться теоретическим материалом лабораторной работы, где подробно рассматривается описание используемых в работе алгоритмов. Результаты обработки данных следует выводить в выходной файл и дублировать вывод на экране.

Контрольные вопросы

1. Каков принцип построения хеш-таблиц?

2. Существуют ли универсальные методы построения хеш-таблиц? Ответ обоснуйте.

3. Почему возможно возникновение коллизий?

4. Каковы методы устранения коллизий? Охарактеризуйте их эффективность в различных ситуациях.

5. Назовите преимущества открытого и закрытого хеширования.

6. В каком случае поиск в хеш-таблицах становится неэффективен?

7. Как выбирается метод изменения адреса при повторном хешировании?

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.1. Основные алгоритмы: пер. с англ. – М.: Вильямс, 2000

2. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.3. Сортировка и поиск: пер. с англ. – М.: Вильямс, 2000

3. Вирт Н. Алгоритмы + структуры данных = программы: пер. с англ. – М.: Мир, 1985

4. Гудман С., Хидетниеми С. Введение в разработку и анализ алгоритмов. – М.: Мир, 1981

5. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных: пер. с англ. – М.: Мир, 1998

6. Кормен Т. и др. Алгоритмы. Построение и анализ: пер. с англ. -М.: Вильямс, 2007

7. Ахо А., Хопкрофт Д., Ульман Д. Структуры данных и алгоритмы: пер. с англ. – М.: Вильямс, 2000

8. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на С++. Анализ/Структуры данных/Сортировка /Поиск: пер. с англ. – К.: ДиаСофт, 2001

9. Гагарина Л. Г., Колдаев В. Д. Алгоритмы и структуры данных. М.: Финансы и статистика, 2009 г., - 304 с.

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Архитектура информационных систем»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
2022

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- **ПК-1.1:** Осуществляет анализ требований к программному обеспечению;
- **ПК-1.2:** Осуществляет разработку технических спецификаций на программные компоненты и их взаимодействие;
- **ПК-1.3:** Проводит проектирование программного обеспечения;
- **ПК-3.1:** Разрабатывает архитектуру и базы данных информационной системы;
- **ПК-3.2:** Осуществляет организационное и технологическое обеспечение кодирования на языках программирования;
- **ПК-3.3:** Выполняет оптимизацию работы информационной системы.

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Архитектура Информационных систем» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке. Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Детальное описание архитектуры фон- неймановских машин	12
Архитектура процессоров машин 2-го и 3-го поколений	12,8
Архитектура микропроцессора семейства PDP	12
Архитектура микропроцессора семейства Intel	13
Дисплеи, их эволюция, направления развития	12
Печатающие устройства, их эволюция, направления развития	12
Сканеры и программная поддержка их работы	4
Средства ввода и вывода звуковой информации	4
Операционные узлы ЭВМ	8
Различные виды триггеров и их сопоставление	6
Представление информации в вычислительных машинах	10
Логические основы построения вычислительной машины	8
Основные блоки ЭВМ	8
Интерфейсные системы ЭВМ	8
	129,8

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210x297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета; - обратите особое внимание на цвет

	гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными

	буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена, соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Базы данных»

Специальность 09.03.02 Информационные системы и технологии

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

— **ПК-3.1:** Разрабатывает архитектуру и базы данных информационной системы;
— **ПК-3.2:** Осуществляет организационное и технологическое обеспечение кодирования на языках программирования;
— **ПК-3.3:** Выполняет оптимизацию работы информационной системы.

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Базы данных» по специальности 09.03.02 «Информационные системы и технологии»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Иерархические системы	8
Сетевые системы	8
Достоинства и недостатки	8
Теоретические основы реляционного подхода к управлению БД	4
Основные понятия реляционной модели данных /	4
Концепция реляционной модели. Правила Кодда	6
Составные части реляционной модели	8
Замкнутость реляционной	6
	52

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета; - обратите особое внимание на цвет

	гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными

	буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена, соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Безопасность жизнедеятельности»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- УК-8.1: Выявляет и устраняет проблемы, связанные с нарушениями техники безопасности на рабочем месте
- УК-8.2: Обеспечивает безопасные и комфортные условия труда на рабочем месте
- УК-8.3: Анализирует факторы вредного влияния на жизнедеятельность элементов среды обитания (технических средств, технологических процессов, материалов, зданий и сооружений, природных и социальных явлений)

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Безопасность жизнедеятельности» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Основные термины, понятия и определения.	5
Теоретические основы и практические функции БЖД	5
Особенности обеспечения безопасности функционирования автоматизированных и роботизированных производств.	6
Освещение и световая среда в производственных помещениях.	6
Прогнозирование и оценка обстановки при чрезвычайных ситуациях.	20
Пожаровзрывобезопасность	6
Защита населения в чрезвычайных ситуациях	5,8
Устойчивость функционирования объектов экономики в чрезвычайных ситуациях.	6
Экстремальные ситуации.	6
Ликвидация последствия чрезвычайных ситуаций	6
Законодательство об охране окружающей.	6
Законодательство об охране труда.	6
Законодательство о безопасности в чрезвычайных ситуациях	6
	75,8

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210x297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета; - обратите особое внимание на цвет

	гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными

	буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена, соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) ДГТУ в г. Азове

Методические указания

по освоению дисциплины
«Деловая коммуникация»

для обучающихся по направлению подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии

профиль подготовки «Информационные системы и технологии»

Азов
2022

Методические указания по изучению дисциплины

В процессе обучения студентов используются различные виды учебных занятий (аудиторных и внеаудиторных): лекции, практические занятия, консультации и т.д. На первом занятии по данной учебной дисциплине необходимо ознакомить студентов с порядком ее изучения, раскрыть место и роль дисциплины в системе наук, ее практическое значение, довести до студентов требования кафедры, ответить на вопросы.

1.1 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Качественное и полное усвоение учебной программы предусматривает органичную взаимосвязь аудиторных занятий с самостоятельной работой студента. В лекциях раскрываются наиболее существенные вопросы курса, на семинарских занятиях рассматриваются и обсуждаются ключевые, полемические темы и проблемы курса «Деловые коммуникации», тренируются необходимые умения и навыки. Практические занятия могут проходить в форме деловых игр, коллоквиумов, лабораторных итворческих заданий, семинаров. Почти каждое практическое занятие сопровождается ситуационными задачами, творческими заданиями, развивающими соответствующие умения и навыки.

В процессе самостоятельной работы студенты изучают менее трудные вопросы итемы, которые с достаточной степенью глубины и полноты освещены в соответствующих учебниках, учебных пособиях и иных источниках.

Форма представления студентами результатов самостоятельной работы – рефераты и доклады, отчеты о самостоятельной творческой работе, которые тематически встраиваются в планы семинарских занятий и заслушиваются при изучении определенных тем.

1.2 Методические рекомендации по организации практических занятий студентов

Практика – форма систематических учебно-практических занятий, с помощью которых обучающиеся изучают тот или иной раздел определенной научной дисциплины, входящей в состав учебного плана.

При подготовке к практическим занятиям следует использовать основную литературу из представленного списка, а также руководствоваться приведенными указаниями и рекомендациями, лекциями. Для наиболее глубокого освоения дисциплины рекомендуется изучать литературу, обозначенную как «дополнительная» в представленном списке.

На практических занятиях приветствуется активное участие в обсуждении конкретных экономических ситуациях, способность решать задачи по дисциплине и на основе полученных знаний находить наиболее эффективные решения поставленных проблем, уметь находить полезный дополнительный материал по тематике практических занятий.

Студенту рекомендуется следующая схема подготовки к практическим занятиям:

Проработать конспект лекций;

Прочитать основную и дополнительную литературу, рекомендованную по изучаемому разделу;

Решить практическую задачу по представленной теме;

Выполнить домашнее задание;

Проработать тестовые задачи;

При затруднениях сформулировать вопросы к преподавателю. Практические занятия могут проводиться в форме практики со студентами группы или в форме проведения деловой игры. В ходе практикума выясняется степень усвоения студентами понятий, решения формул по важнейшим темам, умение студентов применять полученные знания для решения конкретных практических задач. Как правило, практические занятия проводятся по темам, по которым ранее давался лекционный материал.

2 Методические рекомендации по изучению дисциплины для студентов заочной формы обучения

Основной формой работы студента заочной формы обучения является самостоятельное изучение материала. Завершается изучение курса выполнением контрольной работы. Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса, изучить лекционный материал, обратитьсяк рекомендованной литературе.

Цель контрольной работы - закрепление и проверка знаний, полученных студентами в процессе самостоятельного изучения учебного материала.

Учебным планом для студентов заочной формы обучения по курсу предусмотрено выполнение одной контрольной работы.

Выбор задания по выполнению контрольной работы производится согласно их перечня: номер работы в перечне (1-10) должен совпадать с последней цифрой номера зачетной книжки студента (460916), т.е. тема № 6.

Ответы на заданную тему должны быть полными, конкретными; содержать реальные материалы, информацию.

В работе следует иметь титульный лист, список используемой литературы (в том числе материалы газет, журнальные статьи и т.п., с указанием их авторов, сроков издания, страниц), подпись на титульном листе, срок выполнения.

Выполненная контрольная работа сдаётся на проверку в соответствии с учебным графиком. Студенты, получившие контрольную работу после проверки, должны ознакомиться с замечаниями, и с их учётом и рекомендацией преподавателя.

Форма итогового контроля. Зачет.

Распределение вариантов контрольной работы

	Последняя цифра зачетной книжки
ВАРИАНТ № 1	1
ВАРИАНТ № 2	2
ВАРИАНТ № 3	3
ВАРИАНТ № 4	4
ВАРИАНТ № 5	5
ВАРИАНТ № 6	6
ВАРИАНТ № 7	7
ВАРИАНТ № 8	8
ВАРИАНТ № 9	9
ВАРИАНТ № 10	0

Требования к выполнению и оформлению работы

Написание контрольной работы – это начальный этап в изучении курса. Работа должна быть выполнена, согласно учебному плану, перед сдачей зачета. Контрольная работа предполагает поиск теоретического материала, приобретение опыта самостоятельной работы с литературой по данной теме, получение навыка составления деловых писем различных видов.

Все страницы работы должны быть пронумерованы. Порядковый номер ставят посередине верхнего поля листа, обозначая арабскими цифрами. При печати рекомендуется выбирать шрифт Times New Roman 14 шрифт, межстрочное расстояние – 1,5 интервала.

Цитаты, материалы, заимствованные из книг, журналов должны оформляться в кавычках с последующим указанием в списке использованной литературы. В тексте не должны применяться сокращения слов, кроме общепринятых и расшифрованных при первом упоминании.

Для защиты студент готовит краткое сообщение по выполненным заданиям. Защита контрольной работы является допуском к сдаче зачета по данной дисциплине.

Задания для контрольных работ

Вариант 1.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Культура речи в русской и других национальных традициях.

Задание 2. Речевые ошибки в речи публичных политиков.

Задание 3. Влияние речевой ситуации на речевое взаимодействие.

Задание 4. Изменение нормы литературного языка от Пушкина до наших дней.

Задание 5.Языковые нормы и Интернет.

Задание 6. Раскройте содержание следующих вопросов :проверьте свой уровень владения нормами орфографии и пунктуации. Перепишите, вставляя пропущенные буквы и знаки препинания.

За ноч(?) и_чезли все горо_ские дворники. Усатые и лысые с сизыми носами гр_мадные глыбы в к_ричневых тел_грейках с прокуре(н,нн)ыми зычными голосами дворники всех мастей похожие на (Ч,ч)еховских извоз_иков все вым_рли за сегодн_шн_ю ноч(?).

(Н_)кто (н_)см_тал с тро(т,тт)уаров в кучи ж_лтые и красные листья валявш_еся на земле как дохлые золотые ры_ки и (н_)кто (н_)будил меня утром перекл_каясь и гр_мя ведрами.

А в прошлый четверг когда мне соб_рался пр_снит_ся (н_)обыкнове(н,нн)ый сон даже (н_)сон еще а только ощущение надв_гающ_гося снов_дения без событий и действующ_х лиц сотк_(н,нн)ое из радос_ного ож_дания меня разбудили дворники. Они гр_мели ведрами и шарк_ли метлами по тро(т,тт)уару см_тая в кучи пр_красные мертвые листья вчера еще струивш_еся в воздух_ словно золотые рыбки в аквар_уме. Я проснулась и увид_ла что деревья пож_лтели вдруг за одну ноч(?) как с_деет за одну ноч(?) человек переживший тяж_лое горе. Даже деревц_ посаже(н,нн)ое мной весной на су(б,бб)отнике стояло теперь вздраг_вая золотистой ш_в_люрой и было похоже на ребенка с взлохмаче(н,нн)ой рыж_й головой.

А сегодня ночью все горо_ские дворники и_чезли. И это было просто (з,с)дорово город завале(н,нн)ый листьями. (Н_)наводнение а налистнение *(По Д.Рубиной)*

Задание 7.:выпишите из данных примеров слова с пропущенными гласными в три столбика: 1) проверяемый безударный гласный в корне; 2) непроверяемый безударный в корне; 3) чередующийся гласный в корне.

1. Вдруг гл…дит: отв…рена дверь в покой. 2. Зпле…тенные к…сой кудри п…л…сой об…лись кругом ч…ла. 3. В этом возр…сте своем руку ты вер…теном оц…рапаешь, мой свет! 4. Но р…шился нак…нец, и, м….литву сотв…ря, он ш…гнул через царя. 5.Пов…р дует на огонь, и, тр…ща, огонь г…рит, и струею дым б…жит. 6. Мать, отец прин…лись их обн…мать. Что ж осталось доск…зать. 7. Там в обл…ках пред н…родом через л…са, через м…ря к…лдун н…сет бог…тыря. (А.Пушкин)

Задание 8. Запишите перечисленные ниже слова, расставив в них ударения и дав толкование их лексических значений.

Языковой барьер - языковая колбаса; чудной (странный) человек - чудный (очаровательный) голос; характерный признак - характерная (упрямая) девушка, безудержный, бредовой, валовой, веснушчатый, ветряная оспа, единовременный, бряцать, группировать, ерошить, задать, заиндеветь, закупорить, занять, кашлянуть, кичиться, морщить (лоб), морщить (об одежде), наперчить, заклеить, столяр, христианин, селянин, цыган, украинка.

Вариант 2.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Вопросы культуры речи в СМИ.

Задание 2. Понятие стиля.

Задание 3. Проблемы восприятия устной речи.

Задание 4. Изменения в русском речевом этикете последних лет.

Задание 5.Социально обусловленные формы обращения в русском языке.

Задание 6. Определите, какие из текстов говорят о недостаточной коммуникативной компетенции, а какие – о недостаточной языковой?

- Эти вещи надо ложить в шкаф.
- Врач рассказывает дома о событиях рабочего дня и между прочим упоминает: «Пришлось отправить того пациента на флюорографИю». Жена поправляет: «Не флюорографИю, а флюорогрАфию».
- Ребенок говорит маме: «Хочешь, я еще собачку нарисоваю?»
- Кто-то дает объявление в газету о продаже почти новых лыж и не знает, как лучше написать: *лыжи в хорошем состоянии, в приличном состоянии, в прекрасном состоянии…*
- *Из разговора двух бухгалтеров*:

– Как сведешь дЕбет с крЕдитом – зови пить кофе!

– Какое?

– Черный, конечно.

Задание 7.В письменной форме проанализируйте коммуникативные потребности кого-нибудь из Вашей семьи (родители, брат, сестра), используя в качестве примера следующие описания:

Врач в поликлинике каждый день заполняет истории болезни, делает выписки из них, разговаривает с пациентами, читает рекламные буклеты и инструкции к лекарствам, а по вечерам смотрит телеканал «Культура» и ОРТ и читает классические детективы. В языковую компетенцию такого носителя языка с необходимостью входит понимание текстов, подобных следующему: *«Хлористоводородный трипеленамин принадлежит к группе противогистаминных средств. Кроме противогистаминного влияния, действует местно обезболивающе на поверхность кожи, уплотняет капилляры, а также ликвидирует сопутствующий зуд кожи».* В его коммуникативную компетенцию входит не умение писать подобные инструкции, а умение объяснять их содержание упрощенно для интересующихся больных, чтобы они поняли все, что для них важно знать об этом лекарстве.

Его пациент-школьник – другой тип языковой личности, у него другие коммуникативные интересы: ничего кроме школьных учебников и журналов, посвященных компьютерным играм, он не читает, смотрит только спортивный канал и МТВ, общается с друзьями-скейтбордистами, бродит по Интернету и «болтает» в чатах… Приведенная выдержка из инструкции к лекарству для него – «темный лес», но школьнику и не нужно читать, а тем более писать такие тексты. Они не входят в его коммуникативную практику, следовательно, его коммуникативная компетенция должна развиваться в более актуальных, важных для него направлениях. Например, он будет учиться писать диктанты, сочинения и изложения.

Задание 8. Перепишите, расставляя пропущенные буквы и знаки препинания.

1. Ш…пот ночи, тяж…лая сумка, ч…порный человек, покрыться румянц…м, ж…сткие условия, старый ч…лн, лесные ш…рохи, трещ…тка сторожа, ож…г лица, реш…тка сада, трудолюбивые пч…лы, укрыться плащ…м, мраморный ц…коль, городские трущ…бы,

ж…лтые листья, боч…нок с водой, спорить горяч…, ш…в разош…лся, идти вдоль ш…ссе, подж…г сарай, вощ…ная бумага, грош…вая опера, печ…ный хлеб, деш…вый товар, маж…рный тон, зажж…ный факел, ноч…вка в лесу.

2. Сопост…вляя теорию с практикой прошедш…е науки с ее будущим (н…) отдаваясь безотч…тно (н…) одному самому пр…вл…кат…льному убеждению я стр…мился развить в читателе ту способность самостоят…льного суждения о научных предметах которая сост…вля…т единстве…ый залог и пра…льного пользования выводами науки возможности содействовать ее дальнейшему развитию (Д.Менделеев)

Вариант 3.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Типы речевой культуры.

Задание 2. Новые сферы применения литературного языка.

Задание 3. Речевая культура молодежи.

Задание 4. Национальные различия в невербальной культуре.

Задание 5. Презентация как речевой жанр.

Задание 6. Какие приемы используют авторы рекламы для воздействия на читателя, слушателя? Приведите примеры.

Задание 7. Проанализируйте, для чего используются в тексте нелитературные языковые варианты?

1. Аксютка щелкает зубами от голода, или, по туземному выражению, у него по брюху девятый вал ходит, а в брюхе зори бьют.
2. В цехе не любят тех, кто языком больше чешет.
3. Смотрю: с левого траверза маленький ялик кувыркается.
4. Он только с виду – дубина стоеросовая, а черепок у него работает на тридцать узлов.
5. После обеда стало разведриваться, и мы повеселели.
6. Мы ее в войну сами на ноги тут становили, сами и подпирали плечом, чтобы не хитнулась.

Задание 8. Перепишите, расставляя пропущенные буквы и знаки препинания.

I. Пр…бывать на даче, пр…дать друга, пр…творить планы в жизнь, пр…ступить закон, бе…пр…страстный судья, непр…ходящий успех, пр…дать необходимый о…енок, пр…одолевать трудности, пр…клонят…ся перед красотой.

II. Если человек (н…) когда (н…) ра…крывал хороших книг волновавших сер…ца и умы миллионов людей (н…) запомнил хотя (бы) десятка (другого) строк любимого поэта или вообще такового (н…) имеет он обр…ч...н на духовную нищ…ту он живет в (пол) сер…ца лишив себя огромной доли радостей которыми насл…ждае…ся человек общающийся с миром пр…красного (Л. Кассиль)

Вариант 4.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Телевидение и речевая культура.

Задание 2. Новые явления в русском языке 1990-х - 2010 гг.

Задание 3. Виды и причины языковых ошибок и коммуникативных неудач.

Задание 4. Язык коммерческой и политической рекламы.

Задание 5. "Слово как действие" в бытовой и официальной коммуникации.

Задание 6. Проанализируйте передовую статью в «Аргументах и фактах», «Коммерсанте» или другой газете (возможно использование материалов интернет-изданий). Оцените качество информации, способ ее изложения. Опишите адресата данного текста. Выявите авторскую позицию в тексте.

Задание7. Научному тексту свойственно понятие полисемии и омонимии: определите по Толковому словарю С.И.Ожегова и Н.Ю. Шведовой значение следующих слов. В каких областях наук они используются? Найдите (или придумайте) тексты, где данные слова выступают в разных значениях. Можно использовать различные энциклопедии и терминологические словари.

Тело, отражение, закон, род, статья.

Задание 8. Прочитайте предложения, найдите в них ошибки и исправьте. Запишите верный вариант.

1. Гончий автомобиль едва не перевернулся на повороте. 2. Нас познакомили с новым комплектом гимнастических упражнений. 3. Гоголь смело уличал пороки крепостнического строя. 4. Помещик был груб со своими придворными. 5. Помещики жестоко угнетали своих крепостников. 6. Постепенно человек укрощал диких коз, свиней и других животных. 7. Дыхание больного стало отрывистым. 8. Учитель нам представил полную свободу выбора. 9. За последние годы наш город очень преобразовался. 10. Врач взял ланцетом кусочек ваты. 11. У него были невыразимые черты лица. 12. Обладая острым обаянием, он сразу уловил запах только что испеченного пирога. 13. Он был резок и нестерпим в своих суждениях. 14. Они не сумели основать свои требования. 15. Дело это хлопотливое, требует большого терпения.

Вариант 5.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Особенности научного языка специальности на фоне общих черт научного стиля.

Задание 2. Культура речи и эффективность общения.

Задание 3. Современная городская коммуникация.

Задание 4. Взаимодействие вербальных и невербальных средств передачи информации.

Задание 5. Русская языковая личность в межкультурной коммуникации.

Задание 6. Определите стилистические функции канцеляризмов в художественном тексте на примере следующих отрывков. Подберите свои примеры.

1. *Договаривающиеся стороны* заглядывали друг другу в глаза, обнимались, хлопали и вежливо смеялись.
2. Ни *возрастом*, ни *полом* эти молодые люди не гармонировали с *задачами социального обеспечения*.
3. Эта *мебель – орудие производства*. И стул – тоже орудие производства.

Задание 7. Вставьте, где нужно, букву **н**.

Балован_ый ребенок, белен_ый потолок, брошен_ый листок, варен_ый картофель, поле вспахан_о, задание выполнен_о, вязан_ый на спицах шарф, вязан_ый свитер, желан_ая встреча, жарен_ая утка, зван_ый ужин, много раз игран_ый этюд, квашен_ая капуста, кован_ый сундук, краден_ые часы, крашен_ые волосы, куплен_ый билет, лакирован_ая шкатулка, ломан_ая линия, маринован_ые огурцы, маслен_ый пирожок, квартира меблирован_а, медлен_ый темп, мечен_ый атом, морожен_ое мясо, написан_ое письмо, колбаса нарезан_а, невидан_ое диво, неглажен_ая блузка, неждан_ый гость, немудрен_ый завтрак, неписан_ый закон, непрошен_ое вторжение.

Задание 8. Перепишите, расставляя пропущенные буквы и знаки препинания.

Хотя с точки зрения веч…ности дост…жения чистой науки двигающие на новый высокий уровень человеч…скую мысль (по) сути вещей гораздо бол…е значит…льны и в конце концов в истории планеты и человеч…ства бол…е могущ…стве…ы чем величайшие завоевания прикладного знания в текущей жизни для совреме…иков гораздо больш…е значение имеют крупные дост…жения прикладного знания (В. Вернадский)

Вариант 6.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Деловая беседа.

Задание 2. Лингвистика и право: точки соприкосновения.

Задание 3. Функциональные стили.

Задание 4. Культура речи и эффективность общения.

Задание 5. Тактика написания и произнесения речи.

Задание 6. Проанализируйте текст с точки зрения приемов, создающих образность в художественном тексте. Почему автор выбрал именно этот тип изложения? Как создается эмоциональный фон текста? Какие приемы помогают автору раскрыть содержание данного текста?

Далеко за городом, за пустырями окраин, за сорными ольховыми перелесками, в стороне от больших дорог, посреди сосновых лесов и полян иван-чая, заброшенная, окруженная разросшейся сиренью, тихо стареет дача. Ржавеет замок, подгнивает крыльцо, чертополох заглушил цветочные грядки, и, одичавшая, отойдя от забора, сначала несмело, потом все увереннее движется по саду малина, сплетаясь с крапивой в колючую изгородь.

Надвигается август, спускается вечер. Спиной к нам, лицом к закату стоит черный лес, смотрит, как высоко над головой в апельсинных морях догорают жидкие алые острова. Вышла первая звезда, и подбирается ночная сырость. Женщины, сидящие на крылечках, натягивают подолы на колени, говорят тише, подняв темные лица к небесной тишине. Черный кот бесшумно выходит из черной травы, кладет на ступеньку черную мышку. Скоро погаснет последний небесный остров, с востока надвинется тьма, озеро глухо заговорит тяжелыми волнами; заворочается клубами, застонет, распрямляясь, дикий озерный ветер и понесется в безлюдные темные просторы с единственной осенней целью – пригибать кусты, ронять созревшие семена, гнать колючие безымянные клубки по остывающим клеверным долинам, по нехоженым перелескам и, загудев, взвиваясь к растревоженному небу, сдует первый пучок слабых, мимолетных, соскальзывающих в бездну звезд.

Поздней ночью вновь поднимется ветер и, пролетев над бушующим пустынным озером и набрав водяной пыли и гула безлюдных просторов, сорвет с крыши железный лист и, погромыхав им, швыряет в сад. Свистит пригибающаяся под ветром трава, сыплются на влажную ночную землю дикие ягоды, семена диких растений, чтобы прорасти мрачным урожаем драконьих зубов. (*По Т. Толстой*)

Задание 7. Найдите контекстуальные синонимы. В каких случаях они выступают в роли антонимов? С чем это связано?

1. Но не менее страшно было и на всем прочем пространстве России, где вдруг оборвалась громадная, веками налаженная жизнь и воцарилось какое-то недоуменное существование, беспричинная праздность и противоестественная свобода от всего, чем живо человеческое общество.

2. И с утра до вечера, каждую свободную минуту, он чему-нибудь учился, неустанно обезьянничал: что ни увидит, всему подражает и всегда бесталанно, хотя и довольно точно. Чего только не умел он.

Задание 8. Проанализируйте следующие диалоги. Укажите черты разговорной речи.

1. *Маша слышит шум самолета и говорит Вадику:*

- Как низко летит.
- Аэропорт рядом.
- Спать не мешает?
- Нет… Привыкнешь.

2. *Молодой парень из окна машины обращается к прохожим:*

- Мужики, спасайте, где дом 16, корпус 4?
- Командир, не знаю! Сами уже 3 часа ходим. Заблудились.
- Девятнадцатый не видел?
- Да, по-моему, это там.

Вариант 7.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме).

Задание 1. Слагаемые риторического образования специалиста.

Задание 2. История развития красноречия в России.

Задание 3. Законы современного ораторского искусства.

Задание 4. Особенности современной риторики

Задание 5.Правила продуктивного спора.

Задание 6. Подберите примеры использования просторечий в разговорной речи. Укажите причины возникновения этих ошибок.

Задание 7. Вставьте пропущенные буквы.

Ш…пот, кру…кА, об…яние, колос…альный, сверх…естестве…ый, ком…ентатор, двух…этажный, радос…ный, трещ…тка, ап…ел…яция, невтерпеж…, оп…онент, ра…т…лить, крос…вки, гиган…ский, инт…л…игенция, и…подтишка, рес…урсы, деле…ка, умнож…те, рас…читывать, пан…европейский, нав…ждение, пр…бывание, скворе…ник, режис…ер, (пол)книги, меч… .

Задание 8. Перепишите, расставляя пропущенные буквы и знаки препинания.

В гуще в инт…нсивности и в сложности совре…ой жизни человек практически забыва…т что он сам и вс… человеч…ство от которого он (н…) может быть отделен (н…) разрывно связа…ы с (био) сферой с определе…ой частью планеты на которой они живут что они (геологически) закон…мерно связа…ы с ее (материально) энергетич…ской структурой. (В.Вернадский)

Вариант 8.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Основные правила орфоэпии.

Задание 2. Особенности жестикуляции при выступлении в аудитории.

Задание 3. Требования ораторского искусства к произношению речи.

Задание 4. Виды ораторской речи.

Задание 5.Правила доказательства в публичной речи.

Задание 6. Сколько ошибок допущено в предложениях? Проверьте себя по справочникам.

1. Ему никогда, раньше, не приходило в голову, что мытье посуды может быть таким удивительно красивым зрелищем: все танины движения были очень быстры, но не суетливы, очень согласованы, и как-то на редкость приятны.
2. Он вынул из кожанной сумочки, подвешанной к поясу, круглую, свинцовую пулю, оторвал, от висевшей на поясе, тряпки небольшой кусочек, поплевал на тряпку, обмотал ею пулю и забил ее шомполом в ствол мультыка.

Задание 7. Выберите правильный вариант произношения:

1. а) ши[не]ль, б) ши[нэ]ль, в) допустимы оба
2. а) фо[не]ма, б) фо[нэ]ма, в) допустимы оба
3. а) му[зе]й, б) му[зэ]й, в) допустимы оба
4. а) [не]ологизм, б) [нэ]ологизм, в) допустимы оба
5. а) к[ре]м, б) к[рэ]м, в) допустимы оба.

Задание 8. Устраните речевые ошибки, связанные с нарушением лексической сочетаемости.

1. Кричать шепотом - ее любимое занятие. 2. Императрица требовала от графа, чтобы он склонил колени перед княжной. 3. И в этом сражении русские войска потерпели победу. 4. В этих соревнованиях Сергей Бубка одержал поражение. 5. На остановке он прождал ее круглый час. 6. Их новая встреча состоялась глубокой весной. 7. Каждый год в период бархатного месяца сотрудники нашей фирмы отдыхают в Крыму. 8. За стеклянными витражами магазина были видны первые посетители.

Вариант 9.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Место агрессии в телевизионных передачах.

Задание 2. Достоинства и недостатки унифицированных деловых текстов.

Задание 3. Особенности новых видов деловой корреспонденции.

Задание 4. Ораторское искусство и культура.

Задание 5. Принципы ораторской деятельности.

Задание 6. Найдите предложения, в которых допущены грамматические ошибки, подчеркните фрагменты, подлежащие исправлению, и укажите ваш вариант исправления каждой ошибки:

1. Я поговорил и с начальником цеха, и с инженером, обои согласны с моим предложением.
2. Подходя к дому, мне показалось, что я слышу знакомый голос.
3. Кандидаты в депутаты помогают избирателям решать бытовые проблемы и этим завоевывают ихние голоса.
4. В сырых овощах больше пользы, чем в вареных.
5. После вмешательства цензора текст претерпел небольшие изменения, но ничем существенным жертвовать не пришлось.

Задание 7 . Подчеркните в предложениях неправильные конструкции и замените их на нормативные (при наличии нескольких вариантов замены записывайте их через косую черту):

1. В Москве эпидемия гриппа угрожает в конце января.
2. Председатель собрания деликатно намекнул о необходимости соблюдать регламент.
3. Да что депутаты! Какие проблемы стоят перед бедными – им значения не имеет.
4. Вопрос не в том, сколько тебе лет, а в том, как ты справляешь свои обязанности.
5. Нельзя допустить, чтобы нашими судьбами вершил необразованный человек.

Задание 8. Подберите русские синонимы (слова или словосочетания) к словам иноязычного происхождения, используя словарь иностранных слов.

Дискуссия, мораторий, демпинг, аутсайдер, экспортировать, де-факто, инкогнито, брифинг, паблисити, арьергард, демократия, аннотация, аномалия, антагонист, альтруист, фетишизм.

+

Вариант 10.

Раскройте содержание следующих вопросов (в письменной форме):

Задание 1. Функции ораторского искусства.

Задание 2. Речь как объект культурологического исследования.

Задание 3. Психолого-педагогические основы речи.

Задание 4. Общение в профессиональной деятельности специалиста.

Задание 5. Назначение композиционных частей устной речи.

Задание 6. Запишите перечисленные ниже слова, расставив в них ударения и дав толкование их лексических значений.

Группировать, ерошить, задать, заиндеветь, закупорить, занять, кашлянуть, кичиться, морщить (лоб), морщить (об одежде), наперчить, нормировать, озорничать, плесневеть, прибыть, принудить, уведомить, каталог, окружит, овен, огниво, обувной, плато, деяние, пихта, красивее, налущит, нарост, повозрастной, вербовщик, верба, надорвало, петельный, толика (малая часть), оптовый, оползневый, гладильщик, дополна, апостроф, кладовая.

Задание 7. Перепишите текст, расставив знаки препинания. Все числительные запишите словами в соответствующей падежной форме.

Завтра 16 октября с 18 часов 45 минут до 23 часов 41 минуты на улицу лучше не выходить об этом говорит положение Венеры в градусе 66 широты. Овнам не рекомендуется заключать сделки на сумму свыше 562 770 рублей, а Тельцам – на сумму менее 390 860. Раку в этот день можно рискнуть но не более чем 269 750 рублями. Если Лев уже располагает 580 272 рублями капитала ему повезет к этим 580 272 прибавится от 1,5 до 130 000. Дева давно мечтает о 1 500 000, которые могли бы поправить её дела. Завтра эти мечты сбудутся если Юпитер столкнется с Марсом.

Задание 8. Исправьте ошибки в использовании устойчивых словосочетаний. Составьте пять предложений с этими фразеологизмами (на выбор). Используйте фразеологический словарь.

1.Так вот, где собака порылась! 2. «Странный ты человек: прекрасно разбираешься в сложных вещах, а в этом простом деле вдруг заблудился в трёх берёзах», - сказал мне мой старший брат. 3. Нашему герою всё удаётся, должно быть, он родился под счастливой луной. 4. Давно надо было привести в порядок библиотеку, но никак дело не доходит. 5. Я вам зуб даю на отсечение, зачёт вы не сдадите. 6. Только при этих условиях руководитель сумеет занять авангардную роль на производстве. 7. Я поднял тост за моих далёких друзей.

Рекомендации по работе с литературой

Институт обеспечивает учебно-методическую и материально-техническую базу для организации самостоятельной работы студентов.

Библиотека института обеспечивает:

- учебный процесс необходимой литературой и информацией (комплектует библиотечный фонд учебной, методической, научной, периодической, справочной и художественной литературой в соответствии с учебными планами и программами, в том числе на электронных носителях);
- доступ к основным информационным образовательным ресурсам, информационной базе данных, в том числе библиографической, возможность выхода в Интернет.
- обеспечивает доступность всего необходимого учебно-методического и справочного материала;
- разрабатывает: учебно-методические комплексы, программы, пособия, материалы по учебным дисциплинам в соответствии с государственными образовательными стандартами;
- методические рекомендации, пособия по организации самостоятельной работы студентов;
- задания для самостоятельной работы;
- вопросы к зачетам;
- предоставляет студентам сведения о наличии учебно-методической литературы, современных программных средств по своей дисциплине.

Вопросы к контрольной работе по дисциплине

1. Коммуникативные качества речи.
2. Типы речевой культуры и их носители в современной России.
3. Языковые и социальные нормы: изменение, искажение, деградация.
4. Дайте сравнительную характеристику понятий «язык» и «речь».
5. Дайте сравнительную характеристику устной и письменной речи.
6. Раскройте определения понятий «речевое общение» и «речевая ситуация».
7. Охарактеризуйте понятия «речевая культура».
8. Языковая норма, ее роль в становлении и функционировании литературного языка. Варианты норм. Типы норм.
9. Нормы ударения. Особенности русского ударения.
10. Проблема лексической сочетаемости. Проблема речевой избыточности.
11. Уместность словоупотребления. Логические ошибки словоупотребления. Чистота речи.

12. Культура речи: нормативные, коммуникативные, этические аспекты.
13. Коммуникативные качества речи.
14. Точность речи.
15. Понятность речи.
16. Средства речевой выразительности.
17. Речевой этикет: факторы, определяющие его формирование.
18. Эффективность речевой коммуникации.
19. Невербальные средства общения.
20. Восприятие и понимание в процессе общения.
21. Трудности и барьеры в общении.
22. Методы ведения диалога.
23. Разновидности деловых бесед.
24. Особенности публичной речи.
25. Выбор темы и определение целевой установки.
26. Профессиональное красноречие.
27. Язык рекламы и манипуляция сознанием.
28. Вступление как важнейшая составная часть ораторской речи.
29. Главная часть речи, ее задачи, методы изложения материала.
30. Завершение речи.
31. Приемы управления аудиторией.
32. Отличительные особенности системы современного русского литературного языка.
33. Значение понятия «современный» русский литературный язык. Тенденции развития современного русского литературного языка.
34. Типы словарей.
35. Реферат и правила его написания.
36. Письменные жанры научной речи. Тезисы.
37. Основные правила составления документов.
38. Языковые особенности официально-делового стиля.
39. Языковые особенности научного стиля.
40. Правила оформления служебных документов.

Список литературы:

Основная литература:

1. Глазунова О.И. Русский язык и культура речи : учебник / О.И. Глазунова ; ил. В.А.Березина. — М.: КНОРУС, 2016. — 244 с.
2. Черняк В.Д. Культура речи. Практикум : учебное пособие / коллектив авторов; подред. В.Д. Черняк. — М.: КНОРУС, 2017. — 280 с.
3. Введенская Л.А. деловая риторика: учебное пособие. М. : КНОРУС, 2015
4. Егоров П.А., Руднев В.Н. Основы этики и эстетики: учебное пособие. М.,2016
5. Руднев В.Н. Русский язык и культура речи: учебное пособие. М.,: КНОРУС, 2017
6. Самыгин С.И. Деловое общение: учебное пособие. М.,: КНОРУС,2020 .

Дополнительная литература:

1. Кушнерук, С. П. Документная лингвистика: учеб. пособие/ С. П. Кушнерук. - 5-е изд.
- Москва: Флинта: Наука, 2018.
2. Культура устной и письменной речи делового человека: справ.: практикум/ отв. ред.И. М. Рожкова. - 15-е изд.. - Москва: Флинта: Наука, 2009.

Интернет-ресурсы:

1. http://cdbooks.narod.ru/fip/del_ob/020.htm - Деловая переписка и общепринятыеправила
2. http://znamus.ru/page/mejdunar_pismo - Описание правил составления англоязычногоделового письма
3. http://obsheniedel.ru – Деловое общение и его основные принципы.
4. http://www.tigf.org – Природа и сущность этики деловых отношений.
5. http://www.gramota.ru – Справочно-информационный Интернет-портал «Русскийязык для всех».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Дискретная математика»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

—углубление и расширение теоретических знаний;

—развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

—развитие исследовательских умений;

—формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

—формирование профессиональных компетенций:

ОПК-1.1: Использует знания математики, физики, вычислительной техники и программирования при решении задач профессиональной деятельности.

ОПК-1.2: Решает стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования.

ОПК-1.3: Проводит теоретические и экспериментальные исследования объектов профессиональной деятельности

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Дискретная математика» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно-справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также

выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

№ п/п	Тема работы и краткое содержание	Количество часов
1	Теоремы, подстановки, формальные теории, методы доказательств.	10
2	Теоремы Геделя о неполноте, неразрешимые алгоритмические проблемы.	12
3	Равносильные формулы логики предикатов. Предваренная нормальная форма.	12
4	Деревья, задачи оптимизации на графах, задача о раскраске.	12,8
5	Нормальные алгоритмы Маркова.	12
6	Машины Тьюринга	10
ВСЕГО		68,8

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210x297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена, соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) ДГТУ в г. Азове

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

«Иностранный язык (английский)»
для обучающихся по направлению подготовки
15.03.05 Конструкторское-технологическое обеспечение машиностроительных производств
23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов
09.03.02 Информационные системы и технологии

Азов
2022

Общие рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины

Рабочей программой дисциплины предусмотрены аудиторные занятия в виде лекций и практические занятия, также самостоятельная работа.

1. Методические рекомендации по работе с текстом (чтение)

Алгоритм обучения ознакомительному чтению:

1. Прочтите заголовок текста и постарайтесь определить его основную тему.

2. Прочтите абзац за абзацем, отмечая в каждом предложения, несущие главную информацию, и предложения, в которых содержится дополняющая, второстепенная информация. Для поиска главной информации выделяйте ключевые слова.

3. Определите степень важности абзацев, отметьте абзацы, которые содержат более важную информацию, и абзацы, которые содержат второстепенную по значению информацию.

4. Обобщите информацию, выраженную в абзацах, в смысловое (единое) целое (сделайте «компрессию» текста по ключевым словам).

Алгоритм обучения детальному чтению (переводу):

1. Текст, предназначенный для перевода, следует рассматривать как единое смысловое целое.

2. Начинайте перевод с заглавия, которое, как правило, выражает основную тему данного текста.

3. Постарайтесь понять содержание всего текста, прочитайте его целиком или большую его часть, а затем приступайте к отдельным его предложениям.

4. Старайтесь понять основную мысль предложения, опираясь на знакомые слова и выражения, а также на интернациональные слова.

5. При переводе отдельных предложений необходимо помнить, что смысл часто не совпадает с линейной последовательностью предложения: нужно переводить не отдельные слова, а «части предложения» – синтаксические позиции, выстраивая смысловые отношения между ними.

Алгоритм обучения поисковому чтению:

1. Определите тип текста (журнала, брошюры).

2. Выделите информацию, относящуюся к определённой теме /проблеме.

3. Найдите нужные факты (данные, примеры, аргументы).

4. Подберите и сгруппируйте информацию по определённым признакам.

5. Попробуйте спрогнозировать содержание текста на основе реалий, терминов, географических названий и имён собственных.

6. Сделайте беглый анализ предложений /абзацев.

7. Найдите абзацы/фрагменты текста, требующие подробного изучения.

Обучение чтению с элементами аннотирования.

При этом виде чтения используются стратегии поискового и изучающего чтения. Ключевым моментом здесь является умение находить в тексте те элементы информации, которые являются значимыми для выполнения поставленных учебных задач.

Наиболее распространенными видами заданий являются следующие:

1) оценить высказывание как «верное», «неверное» или не содержащееся в тексте;

2) найти в тексте перефразированное высказывание;

3) соотнести высказывание и номер абзаца;

4) ответить на вопросы;

5) обозначить ключевую идею текста или абзаца.

При поиске перефразированных высказываний следует помнить, что перифраза содержит, как правило, другой лексемный состав; здесь широко используются приемы синонимии, антонимии, грамматической трансформации (например, актив – пассив). При ответе на вопрос необходимо найти основу предложения (то, с чего следует начинать ответ) и проанализировать временную форму глагола (в вопросительных предложениях английского языка время часто маркирует вспомогательный глагол). Если вопрос общий, он требует реакции «да» или «нет» с последующим подтверждением на основе информации текста. Если вопрос с вопросительным словом, нужно найти непосредственный ответ на него в тексте, помня при этом, что любой член предложения может быть выражен отдельным словом, словосочетанием или придаточным предложением.

Если необходимо самостоятельно обозначить ключевую идею текста или абзаца, то целесообразно прибегнуть к поиску «ключевых» слов и методу «компрессии», или сжатия текста.

2. Методические рекомендации по подготовке устных высказываний

Работу по подготовке устного монологического высказывания по определенной теме следует начать с изучения тематических текстов-образцов. В первую очередь необходимо выполнить упражнения по изучаемой теме, усвоить предлагаемый лексический материал, прочитать и перевести тексты-образцы, выполнить речевые упражнения по теме. Затем на основе изученных текстов нужно подготовить связное изложение, включающее наиболее важную и интересную информацию. Методические рекомендации:

1. Сформулируйте тему сообщения, правильно озаглавьте свое сообщение.
2. Составьте краткий или развернутый план сообщения.
3. В соответствии с планом проанализируйте необходимую литературу: тексты, статьи. Подберите цитаты, иллюстративный материал.
4. Выпишите необходимые термины, ключевые слова, речевые обороты.
5. Начните сообщение с фраз: I want to tell you - я хочу рассказать о и тп.
7. Обозначьте во вступлении основные положения, тезисы своего сообщения. Обоснуйте, докажите фактами, проиллюстрируйте эти тезисы.

3. Методические рекомендации по работе со словарем

Неумение работать со словарем приводит к неправильному подбору слова и, в конечном итоге, к искажению содержания предложения. Лучше пользоваться словарями большого объема, которые содержат более детализированную дифференциацию словарных значений; электронные словари сокращают при этом процесс поиска слов. Работая со словарем, важно помнить следующее:

1) знать условные обозначения и сокращения, которые обычно приводятся в начале словаря; это поможет различить части речи (study, n – имя сущ., to study, v – глагол), переходность /непереходность глагола (to work – работать, to work smth – изготовлять что-л.), число (ox, sing. – ед. ч., oxen, pl. – мн. ч.) и др. значения, которые существенно влияют на перевод;

2) твердо знать правописание слова, чтобы не спутать орфографически сходные слова (law – закон, low – низкий);

3) различать грамматические формы слова и не путать их со словарной (исходной) формой: ед.ч. существительного, инфинитив глагола, положительная степень прилагательного. Примеры приведения слова к словарной форме:

a) имена сущ.: boxes → box, wives → wife, feet → foot

b) имена прил.: bigger → big, happiest → happy, worse → bad

c) глаголы: travelling → to travel, studied → to study;

4) внимательно анализировать в тексте видовременные и неличные формы глагола, помнить, что в словаре приводится 1-я основная форма. Для установления основной формы неправильных глаголов следует пользоваться специальной таблицей:

wrote ← 2-я форма (Past Simple) глагола to write

taken ← 3-я форма (Participle II) глагола to take;

5) при поиске значений фразовых глаголов, или глаголов с послелогами, помнить, что в словарной статье они содержатся после описания значений базового глагола. Так, после описания глагола get представлены значения фразовых глаголов get on, get off, get up и т.д.;

5) при выборе значения переводимого слова следует помнить о многозначности: в начале словарной статьи обычно дается прямое (основное) значение слова, далее следуют переносные значения, отмеченные арабскими цифрами; правильно подобрать значение слова можно только опираясь на контекст. Значения слов-омонимов обычно представлены в разных словарных статьях, разделенных римскими цифрами. Пример многозначности и омонимии:

Key I – ключ: 1) ключ (для открывания двери); 2) ключ, разгадка, код;

3) ключ (муз.), тон; и т.д.

Key II – отмель, риф.

4. Методические рекомендации по аннотированию текста

В процессе составления аннотации студент обязан:

- уметь четко и логично поделить текст (работу) на соответствующие смысловые разделы, проанализировать их и составить английское высказывание по клише;
- уметь практически применять знания по лексике и грамматике, полученные при изучении базового курса английского языка:
- уметь работать с литературой по специальности на английском языке и первоисточниками информации.

Аннотация (от латинского annotatio – замечание) – краткая характеристика книги, статьи, излагающая их содержание (обычно в виде перечня главных вопросов) и дающая иногда их оценку. Помогает читателю ориентироваться в литературе по тому или иному вопросу и облегчает работу студентов, работодателей и др.

Для составления аннотации на дипломную работу необходимо внимательно ее прочитать, проанализировать ее план. После чего с целью характеристики оригинала (то есть дипломной работы) сформулировать основные положения, перечислить главные вопросы или иным способом описать строение и содержание оригинала.

Аннотация печатается на компьютере на одной стороне белой бумаги формата А4 через полтора интервала; номер основного компьютерного шрифта – 14.

Иллюстрации (схемы; диаграммы; рисунки), если они необходимы, следует располагать непосредственно после текста.

Объем аннотации не должен превышать 150-200 слов (включая вспомогательные слова).

Фамилии, названия учреждений и фирм приводятся способом транслитерации - то есть буквы одной письменности передаются посредством букв другой письменности.

Для орфографически правильного написания английских слов необходимо пользоваться русско-английским словарем.

Для проведения подобной работы необходимо пользоваться речевыми клише. Клише – стереотипное выражение, механически воспроизводимое в типичных речевых контекстах и ситуациях; фраза, структура которой не меняется. (Например, Вопрос ждет своего решения).

Аннотация на английском языке должна содержать:

- объект исследования;
- анализ исследуемой темы;
- рекомендации по сути исследования;
- область применения и перспективы.

При составлении аннотации на дипломную работу необходимо использовать следующие клише:

Для вводной части аннотации:

- The title of my diploma paper(graduation work) is…..
- This graduation work (diploma paper) is about…
- The topic of the given diploma paper is…..
- This graduation work is devoted to….

Для основной части аннотации:
- The author dwells on…
- The work touches upon…
- The purpose of the work is to give some information about…
- Then the author goes on to say that…
- Much attention is given to…
- The readers' attention is also drawn to…
- The author writes (states, points out) that…
- It would not be an exaggeration to say that…

Для заключительной части аннотации:
- In conclusion I'd like to stress…
- The author comes to the conclusion that…
- The work is of (no) interest for narrow (wide) circle of readers.

При необходимости можно добавить оценочную характеристику работы. Для этого можно использовать следующие клише:
- I found the work educative (informative, interesting, modern important) for…
- In my opinion the work is…
- I think the work is…

ПРИМЕР АННОТАЦИИ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ НА ДИПЛОМНУЮ РАБОТУ

In the final qualifying work the of financial and economic activities of the enterprise was analyzed, and ways to improve the efficiency of economic activities of MOF LLC have been developed.

Within the research we examined the theoretical foundations of analyzing the financial and economic activity of the enterprise; the nature, objectives and functions of the analysis of financial and economic activity of the enterprise; factors determining the financial condition of the company: liquidity, solvency and financial stability.

The second chapter describes the analyses of the financial and economic activities of MOF LLC, including organizational and economic characteristics of MOF LLC; the results of the financial activity, solvency, liquidity and financial stability of MOF LLC. On the basis of the conducted research, ways of increasing the efficiency of economic activity of MOF LLC have been developed.

The paper contains 10 tables, 14 drafts, 17 formulas. When writing the work 53 literature sources were used.

Составленная аннотация вместе с русским вариантом представляется преподавателю на проверку. Затем оба варианта аннотации (русский и английский) вшиваются в диплом.

5. Методические рекомендации по реферированию текста

Реферирование текста на иностранном языке − это процесс переработки текстового документа. В процессе реферирования излагается основное содержание прочитанного. При этом в реферате могут содержаться не все данные текстового документа, но основная их часть. В процессе реферирования необходимо не просто сократить текст, а существенно переработать содержание, композицию и язык оригинала, согласно плану реферирования.

План реферирования:

1. Введение. Во введении отражаются следующие данные: название текста, автор текста, исследуемая проблема. Четко и сжато излагается основная мысль.
2. Основная часть. Основная часть содержит краткое содержание текста, с указанием фактов

и данных, необходимых для передачи смыслового содержания. Передачу смыслового содержания необходимо выполнять с использованием устойчивых выражений (фраз-клише). Однотипные факты группируются, им дается обобщенная характеристика. Цифровые данные систематизируются и обобщаются. Язык оригинала претерпевает изменения в сторону нейтральности, простоты и лаконичности. Исключаются образные выражения, эпитеты, не существенные определения. Происходит упрощение сложных синтаксических конструкций.

3. Заключение. В заключении должны быть представлены выводы, оценка прочитанного текста и собственное мнение о проблеме.

На экзамене студентам предлагается выполнить реферирование текста научного или публицистического стиля, объемом 1200 печатных знаков. Время выполнения реферирования текста на иностранном языке − 30 минут. Данный вид деятельности выполняется без использования словаря.

Во время экзаменационного реферирования студент должен продемонстрировать следующие знания и умения:

− умение выделять главную и дополнительную информацию текста;
− умение сокращать и упрощать текст;
− умение высказывать свое мнение о прочитанном;
− знание устойчивых речевых оборотов (фраз-клише) и умение их использовать.

Выражения для реферирования текста

Введение

1) The article/ paper that I have just read is headlined…	Статья, которую я только что прочитал(а), называется…
The title of the article/ paper under discussion is…	Название обсуждаемой статьи…
2) The author of the article/ paper under review is…(unknown/ not mentioned).	2)Автор обсуждаемой статьи … (неизвестен/ не упомянут).
3) The article/ paper is taken from … (the Economist)	Статья взята из … (журнала «Экономист»).
4) The theme/ purpose/ object/ main idea of the article/ paper is…	4) Тема/ цель/ предмет/ главная идея статьи заключается в том, что…
The present paper is about… The given paper reviews/ presents basic theory of… The article is devoted to the problem of… The paper deals with the following idea: … The article discusses some problems relating to…	Данная статья о (следующем). Данная статья обозревает/ представляет основную теорию… Статья посвящена проблеме… Статья связана со следующей идеей: … Статья обсуждает некоторые проблемы, связанные с …
Now I would like to give you the paper in short/ in a nutshell.	Сейчас мне хотелось бы представить содержание статьи вкратце.

Основная часть

We can divide the present paper into seveal/ 5 parts/ paragraphs.	Мы можем разделить статью на несколько/ 5 частей/ параграфов.
In the first part/ paragraph the author tells us/ the reader about…	В первой части/ параграфе автор рассказывает нам / читателю о
First/ at first the author points out that…/ notes that…/ describes…/ presents…	Сначала, автор указывает на то, что…/ отмечает, что…/ описывает… /представляет…
In the second part/ paragraph the author touches on the problem of… /explains that…	Во второй части/ параграфе автор затрагивает проблему… /объясняет, что…
Then/ after that/ further on/ next the author gives a detailed description of…	Далее/ затем автор дает детальное описание…

In the third part the author states that…/ mentions that… studies…/ goes on to say that…/ adds that…	В третьей части автор утверждает, что… упоминает что, изучает…/ продолжает говорить, что… добавляет то…

Заключение

Finally the author comments on the problem of…	наконец, автор комментирует проблему…
In the end of the article the author enumerates… concludes that… summarizes the ideas about…	В конце статьи автор перечисляет… делает вывод, что… суммирует идеи о…
To sum up/ in conclusion the author points out that…	Чтобы подвести итог/ в заключении автор указывает на то, что…
At the end of the article the author comes to the conclusion that…	В конце статьи автор приходит к заключению, что…
We find the conclusion that…	Мы приходим к заключению, что…

Выражение оценки и собственного мнения

On reading the article we realize the fact that the article is: (un)interesting, of high (no) value/ (in)valuable.	Прочитав статью, мы приходим к факту того, что статья: (не) интересная, (не) информативная, оригинальная, (не) представляет ценности.
The article gives much food for thought. Frankly speaking I (dis)like the article as it is actual; out-of-date; dull; useful (useless), of (little) importance, boring.	Статья дает пищу для размышлений. Честно говоря, мне (не) понравилась статья, так как она актуальная; устаревшая; скучная; (бес)полезная; (не) важная; скучная.
It is (not) difficult to read as the language of the article is easy/ complicated for undestanding.	Она проста/ сложна для чтения, так как язык статьи прост/ сложен для понимания.
The article is (not) for a general reader.	Статья для (не) для общего читателя.

Пример

Текст

FREELANCE WORK

A freelancer, freelance worker, or freelance is somebody who is self-employed and is not committed to a particular employer long term. Fields where freelancing is common include: journalism, publishing, writing, filmmaking, cosmetics, fragrances, editing, event planning, copy editing, copywriting, computer programming, webdesign and graphic design, website development, consulting, tour guiding, and translating.

Freelancers may charge by the day, hour, or page or on a per-project basis. Instead of a flat rate or fee, some freelancers have adopted a value-based pricing method based on the perceived value of the results to the client. By custom, payment arrangements may be upfront, percentage upfront, or upon completion. For more complex projects, a contract may set a payment schedule based on milestones or outcomes.

According to the Bureau of Labor Statistics of the U.S. Department of Labor, approximately 10.3 million workers in the US (7.4% of the US workforce) are independent contractors. In the past three years, companies have increased their outsourcing by 22% on the internet.

The Internet has opened up many freelance opportunities, expanded available markets, and has contributed to service sector growth in many economies. Offshore outsourcing, Online outsourcing and crowd sourcing are heavily reliant on the Inter net to provide economical access to remote workers, and frequently leverage technology to manage workflow to and from the employer. Much of the computer freelance work is being outsourced to poorer countries outside the United States and Europe. This has spurred conflict because American and European workers are not receiving the benefits. The compromise has led to student freelancers who now provide a steady source of cheap labor while keeping jobs American and European. The major drawback is the uncertainty of work and thus income, and lack of company benefits such as a pension, health insurance, paid holidays and bonuses. Many freelancers, especially in journalism, regard themselves as having greater income security through the diversity of outlets–the loss of any one of which leads to the loss of only a portion of income, rather than its totality as with salaried employees.

Freelancers often must handle contracts, legal issues, accounting, marketing, and other business functions by themselves. If they do choose to pay for professional services, they can sometimes turn into significant out-of-pocket expenses. Working hours can extend beyond the standard working day and working week. According to the latest investigations India leads rather confidently being the largest source of freelancers over the world. Then United States follow India, having been pressed by Russia. The third place is divided between Russia and Philippines. Then there are Ukraine, Pakistan; on last place is Argentina. The matter is that Indians, Pakistanis and especially Filipinos frequently work at the low prices. In a case with Filipinos business reaches cents per hour. It makes $20 a week and, roughly speaking, $80 a month. More than 12,000 freelancers work on the average for 5$/hour! Almost 23,000 – for 10$/hour, hardly more than 14,000 – for 15$/hour. For 30$/hour works all order of 3,000 freelancers. In the USA average hourly rate is the best. The lowest rate is in

the Third World countries, Russia is among them in this list. It is important to note that being a freelancer is not suitable to all people. Being a freelancer requires discipline and self-motivation along with other easier to acquire skills. If the freelancer works at home they are prone to additional stresses that if not managed properly, could prevent them from earning an income at their profession.

Образец реферирования

The article is headlined “Freelance Work” and it provides thorough investigation of freelancing as it is. It describes its drawbacks and advantages, the way freelancer is paid and the spheres where freelancing is common. According to the author the general fields where freelancing is common are journalism, publishing, writing, filmmaking, cosmetics, fragrances, editing, event planning, copy editing and some others. The way freelancers are usually paid is by fixed hourly rate and this type of payment is accepted all over the world. But there are some fields where instead of a flat rate or fee, some freelancers have adopted a value-based pricing method based on the perceived value of the results to the client. Contracts are signed but very rarely.

The author of the text provides some data based on information from the Bureau of Labor Statistics of the U.S. Department of Labor. Due to Internet expansion the number of freelancers is growing every day. The Internet has opened up many freelance opportunities, expanded available markets, and has contributed to service sector growth in many economies. Thus the employer can hire professionals from any country and it is not necessary to be located close to the main office. Freelancer can make job from home, create some projects and send by email. The salary is send by bank transaction or some web-services if necessary.

Except numerous advantages and growing popularity of freelancing there are some drawbacks too. The author gives several examples: the uncertainty of work and thus income, and lack of company benefits such as a pension, health insurance, paid holidays and bonuses. If there is a need to make some contracts freelancers often must handle legal issues, accounting, marketing, and other business functions by themselves. If they do choose to pay for professional services, they can sometimes turn into significant out-of-pocket expenses.

In my opinion the worst thing about freelancing is that it doesn‟t provide feeling of security and sometimes even brings some uncertainty to life. Working hours can extend beyond the standard working day and working week because freelancer gets money only after having some result or on work completion. Due to the desire to get normal salary most responsible freelancers work more.

The author states that it is not easy to be freelancer and this type of work doesn‟t suit to all because being a freelancer requires discipline and self-motivation along with other easier to acquire skills. To my mind freelance work suits to students or pensioners more as they can have extra money to what they have from the state. Plus they can study (if we speak about students) or can have free time with grandchildren or rest (if we mean pensioners). But due to uncertainty and financial instability I think freelancing doesn‟t suit toyoung professionals with families. If it is a second source of income it would be great but to rely completely on freelance I would like.

Personally I think this article is worth reading as it is very informative, gives much food for thought especially to those people who are going to find job in the nearest future.

6. Рекомендации по освоению дисциплины в дистанционном формате

Для изучения дисциплины с использованием дистанционных технологий обучения используются следующие ресурсы:

1. Для отправки учебно-методических материалов:
а) облачное хранилище Yandex.Диск;
б) система дистанционного обучения Moodle;
в) электронная почта;
г) мессенджеры WhatsApp и Вконтакте;
д) системы телеконференций Zoom и Skype.
2. Для приема результатов освоения дисциплины:
а) электронная почта;
б) мессенджеры WhatsApp и Вконтакте;
в) системы телеконференций Zoom и Skype;
г) система дистанционного обучения Moodle;
д) электронная информационно-образовательная среда института;
3 Для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:
а)системы телеконференций Zoom и Skype;
б) система дистанционного обучения Moodle;
в)электронная информационно-образовательная среда института

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Инструментальные средства информационных систем»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- ОПК-2.1: Разработка и отладка программного кода на языках программирования
- ОПК-2.2: Проводит техническую поддержку и сопровождение инфокоммуникационных систем и сетей
- ОПК-2.3: Осуществляет работы по созданию (модификации) и сопровождению информационных систем, автоматизирующих задачи организационного управления и бизнес-процессы
- ОПК-2.4: Использует современные операционные системы для решения задач профессиональной деятельности
- ОПК-7.1: Определяет первоначальные требования к информационной системе: сбор и анализ информации по платформам и инструментальным программно-аппаратным средствам для реализации информационной системы;
- ОПК-7.2**:** Проводит разработку архитектуры инфор-мационной системы: выполняет выбор платформ и инструментальных программно-аппаратных

средств для реализации информационных систем с учетом технического задания;

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Инструментальные средства информационных систем» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно-справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также

выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Построение консольных приложений	8
Построение приложений с использованием оконных интерфейсов	8
Построение многооконных приложений	9,8
Отладка приложений	10
Подготовка релиза приложения	10
Специальные библиотеки	10
Экспертные системы и системы поддержки принятия решений	6
Системы интеллектуального проектирования и совершенствования систем управлени	8
Структурирование WEB приложения	12
CSS, HTML, Javascript, Ajax, Apache	12
Системы обработки финансово-экономической информации	10
Системы управления базами данных	12
Личные информационные системы	12
Использование моделей данных	9,7
Системы подготовки текстовых документов	8
Системы подготовки презентаций	10
	155,5

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Инструментальные средства информационных систем»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- ОПК-2.1: Разработка и отладка программного кода на языках программирования
- ОПК-2.2: Проводит техническую поддержку и сопровождение инфокоммуникационных систем и сетей
- ОПК-2.3: Осуществляет работы по созданию (модификации) и сопровождению информационных систем, автоматизирующих задачи организационного управления и бизнес-процессы
- ОПК-2.4: Использует современные операционные системы для решения задач профессиональной деятельности
- ОПК-7.1: Определяет первоначальные требования к информационной системе: сбор и анализ информации по платформам и инструментальным программно-аппаратным средствам для реализации информационной системы;
- ОПК-7.2**:** Проводит разработку архитектуры инфор-мационной системы: выполняет выбор платформ и инструментальных программно-аппаратных

средств для реализации информационных систем с учетом технического задания;

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Инструментальные средства информационных систем» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно-справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также

выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Построение консольных приложений	8
Построение приложений с использованием оконных интерфейсов	8
Построение многооконных приложений	9,8
Отладка приложений	10
Подготовка релиза приложения	10
Специальные библиотеки	10
Экспертные системы и системы поддержки принятия решений	6
Системы интеллектуального проектирования и совершенствования систем управлени	8
Структурирование WEB приложения	12
CSS, HTML, Javascript, Ajax, Apache	12
Системы обработки финансово-экономической информации	10
Системы управления базами данных	12
Личные информационные системы	12
Использование моделей данных	9,7
Системы подготовки текстовых документов	8
Системы подготовки презентаций	10
	155,5

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Информационная безопасность»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

ОПК-3.1: Выполняет стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры

ОПК-3.2: Применяет основные требования информационной безопасности в рамках реализации информационной и библиографической культуры для решения поставленных задач в профессиональной деятельности.

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Информационная безопасность» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;

– наименования лекционных разделов курса;

– темы практических работ работ;

– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно-справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать

внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Тема работы и краткое содержание	Количество часов
1	Информация и Безопасность: основные определения. Понятие Информа- ционной безопасности. Основные составляющие информационной безопасности. Важность и сложность проблемы информационной безопасности	6
2	Наиболее распространенные угрозы информационной безопасности. Основные определения и критерии классификации угроз. Наиболее распространенные угрозы доступности. Некоторые примеры угроз доступности. Вредоносное программное обеспечение. Основные угрозы целостности. Примеры угроз целостности. Основные угрозы конфиденциальности	6
3	Что такое законодательный уровень информационной безопасности и почему он важен. Обзор российского законодательства в области информационной безопасности. Обзор зарубежного законодательства в области информационной безопасности. О текущем состоянии российского законодательства в области информационной безопасности	6
4	Стандарты и спецификации в области информационной безопасности. Оценочные стандарты и технические спецификации. «Оранжевая книга» как оценочный стандарт. Информационная безопасность распределенных систем. Рекомендации X.800. Стандарт ISO/IEC 15408. Гармонизированные критерии Европейских стран. Интерпретация «Оранжевой книги» для сетевых конфигураций. Руководящие документы Гостехкомисии России	6
5	Простые числа. Арифметика в классах вычетов. Методики получения больших простых чисел. Теорема Ферма. Теорема Эйлера. Основные алгоритмы.	2
6	Структура симметрично шифрования. Структура сети Фейстеля. Режимы симметричного шифрования. Выбор алгоритма AES	2

7	Основы асимметричного шифрования. Функции с тайным ходом. Алгоритмы ассиметричного шифрования.	2
8	Хэш-функции. Применение Хэш- функции. Требования к Хэш-функциям и способы их формирования. Цифровая подпись и MAC.	2
9	Понятие протокола. Протоколы с посредником и арбитром. Универсальные протоколы. Криптографические протоколы. Применение протоколов.Протокол KERBEROS.	2
ВСЕГО		36

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210x297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Информационно-образовательная среда вуза для лиц с ОВЗ»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов

202_

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

УК-3.1: Командообразование и развитие персонала

УК-3.2: Понимает особенности поведения выделенных групп людей, с которыми работает/взаимодействует, учитывает их мнение в своей деятельности

УК-3.3: Управление эффективностью работы персоналаЗадания разработаны в соответствии с:

Рабочей программой дисциплины «Информационно-образовательная среда вуза для лиц с ОВЗ» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте

ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно-справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать

внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Жизненный цикл программных систем	12
Методы управления проектами при разработке программных систем	15
Методы проектирования программных систем	12
Модульный подход к программированию	15
Структурный подход к программированию	15
Объектно-ориентированный подход к программированию	12
Декларативный подход к программированию	15
Параллельное программирование	12
Case-технологии разработки программных систем	15
Доказательное программирование	15
	138

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»

Специальность 09.03.02 Информационные системы и технологии

Азов
202_

Методические указания для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов».

Предназначены для студентов направления 09.03.02 «Информационные системы и технологии» всех форм обучения.

УДК 372.8:004

Лабораторная работа №1

Анализ свойств алгоритмов

Цель работы: изучить и проанализировать свойства алгоритмов

Теоретические сведения

Само слово «алгоритм» происходит от латинской транслитерации «alchorismi» или «algorismi» арабского имени среднеазиатского ученого ал-Хорезми´ Мухаммеда бен Муса (780–847). По латинским переложениям арифметического трактата ал - Хорезми средневековая Европа познакомилась с индийской десятичной позиционной системой счисления.

Понятие алгоритма является одним из основных понятий современной науки. Во многих разделах математики, логики и информатики возникают вычислительные процедуры механического характера. В них требуется найти решение конкретной задачи по некоторому общему правилу (алгоритму) для решения задач данного класса. Алгоритмом является, например, правило сложения натуральных чисел, записанных в десятичной системе счисления. Оно описывает способ для вычисления суммы произвольных натуральных чисел, рассматривая алгоритм Евклида для нахождения НОД целых чисел или многочленов, в информатике - алгоритм обхода вершин графа и т.д.

Рассмотрим неформальное определение понятия алгоритма. Это определение не является строгим математическим определением, а является

лишь разъяснением понятия на интуитивном уровне. Алгоритм—это точное предписание, которое задает вычислительную процедуру. Данная процедура перерабатывает исходный набор данных P (входной объект) и направлена на получение обусловленного этими данными результата Q (объекта на выходе). Она состоит из отдельных, элементарных шагов—тактов работы алгоритма. Каждый шаг заключается в смене одного набора данных другим набором (объектом, состоянием).

Переход от предыдущего состояния к последующему происходит по заранее заданному, конечному набору инструкций. Эти инструкции не должны предполагать никаких догадок и вероятностных соображений со стороны человека или машины, нужно только точно их исполнять. Некоторые состояния опознаются как заключительные, при которых процесс вычислений заканчивается. При этом на основе некоторой инструкции определяется, что считать результатом вычислений.

Пусть алгоритм A имеет исходный набор данных P. Возможны следующие три случая протекания алгоритмического процесса.

1. На некотором шаге возникает состояние, опознаваемое как заключительное. При этом происходит остановка вычислений и выдается результат Q.

2. Каждое очередное состояние сменяется последующим до бесконечности, т.е. процесс вычислений никогда не останавливается.

3. При некотором состоянии возникает ситуация, когда процесс вычислений обрывается без выдачи результата (например, не срабатывает инструкция для определения результата вычислений). Тем самым нет перехода к следующему шагу и нет результата вычислений. В этом случае говорим, что произошла безрезультатная остановка.

Считается, что алгоритм A применим к исходному набору данных P тогда и только тогда, когда выполнен случай 1, т.е. когда процесс вычислений заканчивается и получен результат вычислений Q. Этот результат будем обозначать через A(P). В случаях 2 и 3 результат A(P) не существует.

Основные черты алгоритмов. Итак, мы привели разъяснение, а не строгое определение алгоритма. Отметим некоторые характерные свойства понятия алгоритма.

Дискретность алгоритма. Процесс последовательного преобразования исходного набора данных в алгоритмическом процессе происходит по тактам (шагам): такт 1, такт 2,. . . . Каждый такт является сменой одного набора данных другим набором.

Детерминированность алгоритма. В алгоритмическом процессе происходит преобразование объекта P на входе в объект Q на выходе алгоритма. При этом все шаги алгоритма A, величины промежуточных вычислений и выходной объект Q однозначно обусловлены заданием пары (A, P). Это свойство – детерминированность алгоритма.

Детерминированность алгоритма означает, что при повторном выполнении A с объектом P на входе снова получится объект Q. Тем самым обеспечивается возможность сообщения алгоритма одним лицом другому лицу. При этом другое лицо сможет выполнять алгоритм без участия первого. В частности, возможна передача выполнения алгоритма компьютеру.

Массовость алгоритма. Говоря об алгоритме, мы уже отмечали такое его свойство, как массовость—требование найти единый алгоритм для решения не отдельной задачи, а серии задач из некоторого класса.

Отдельные задачи класса получаются при варьировании входных данных. Поэтому для каждого алгоритма существует некоторая фиксированная, потенциально бесконечная совокупность X возможных начальных данных. Из этой совокупности выбирается объект P, поступающий на вход алгоритма. Например, в алгоритме сложения натуральных чисел в качестве X выступает множество всех пар _a, b_, где a, b – произвольные натуральные числа.

Изучая алгоритмы, мы придерживаемся некоторых соглашений—абстракций теории алгоритмов. В качестве примера рассмотрим абстракцию потенциальной осуществимости. Как уже отмечалось, алгоритмический процесс при выработке результата Q из исходных данных P совершает несколько отдельных шагов. Число таких шагов может быть настолько велико, что достижение результата Q является практически неосуществимым. Однако в общей теории алгоритмов мы не учитываем практическую осуществимость и считаем возможным выполнить любое конечное число шагов. Это свойство называется абстракцией ***потенциальной осуществимости.*** Это же положение предполагает, что мы можем оперировать со сколько угодно большими объектами, например, сколь угодно длинными словами и т.п.

Задание:

1. Построить алгоритм метода
2. Проанализировать свойства алгоритма
3. Описать изменение свойств зависимости от входных данных

Варианты задания:

1. Метод золотого сечения для поиска корня нелинейного уравнения
2. Метод половинного деления для поиска корня нелинейного уравнения
3. Метод хорд для поиска корня нелинейного уравнения
4. Метод касательных для поиска корня нелинейного уравнения
5. Комбинированный метод хорд и касательных для поиска корня нелинейного уравнения
6. Метод поиска значения в массиве
7. Метод пузырьковой сортировки
8. Метод трапеции для нахождения определенного интеграла
9. Метод прямоугольников для нахождения определенного интеграла
10. Метод парабол Симпсона для нахождения определенного интеграла

Лабораторная работа №2

Анализ примитивно - рекурсивных функций и частично рекурсивных функций

Цель работы: изучить и проанализировать примитивно - рекурсивные функции и частично рекурсивные функции

В соответствии с лекциями выполнить следующие задания:

Задание№1

ЗАДАЧА 1. *Пусть n Є N. Доказать примитивную рекурсивность функции* $f(x) = x + n$.

ЗАДАЧА 2. *Доказать, что всякая примитивно рекурсивная функция является всюду определенной функцией.*

ЗАДАЧА 3. *Пусть n—произвольное натуральное число. Доказать примитивную рекурсивность следующих функций*

1) $f(x, y) = x + y + 1$, 2) $f(x, y) = xy + 2$, 3) $f(x) = nx$,

4) $f(x, y) = x^y$, (где $0^0 = 1$), 5) $f(x) = x^2$, 6) $f(x) = x^n$.

Задание №2

ЗАДАЧА 1. *Доказать, что следующие функции частично рекурсивны. Какие из этих функции примитивно рекурсивны, а какие частично рекурсивны, но не примитивно рекурсивны?*

1) $f(x, y) = x + y + 2$, 2) $f(x, y) = x + xy$, 3) $f(x, y) = x^y + 2$,

4) $f(x, y) = x + 2y$, 5) $f(x, y) = xy + 3$,

ЗАДАЧА 2. *Пусть функция $f(x)$ не определена ни при одном значении x. Будет ли функция $f(x)$ примитивно рекурсивной, частично рекурсивной?*

Лабораторная работа №3

РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ФУНКЦИИ НА МАШИНЕ ТЬЮРИНГА

Цель работы: изучить работу машины Тьюринга

Теоретические сведения

Приведены основные теоретические положения по оценке применимости алгоритмов к множеству исходных данных на основе машин Тьюринга.

Общие понятия алгоритмов

Под алгоритмом интуитивно понимается некоторое формальное предписание, действуя согласно которому можно получить нужное решение задачи.

Рассмотрим алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух заданных целых положительных чисел a и b. Этот алгоритм может быть записан в виде следующей системы последовательных указаний:

1. Обозревай данные числа a и b. Переходи к следующему указанию.
2. Сравни обозреваемые числа ($a = b$, или $a < b$, или $a > b$). Переходи к следующему указанию.

3. Если обозреваемые числа равны, то каждое из них дает искомый результат. Процесс вычисления остановить. Если нет, переходи к следующему указанию.
4. Если первое обозреваемое число меньше второго, то переставь их местами. Переходи к следующему указанию.
5. Вычитай второе число из первого и обозревай два числа: вычитаемое и остаток. Переходи к указанию 2.

На этом примере отметим важнейшие черты алгоритма:

1. Массовость – применимость алгоритма не к одной задаче, а к классу задач.
2. Дискретность – четкая разбивка на отдельные шаги алгоритма.
3. Детерминированность – такая организация этапов выполнения, при которой переход от одного шага к другому однозначен.
4. Конечность – для получения результата при применении алгоритма к решению конкретной задачи выполняется конечная последовательность шагов алгоритма.

С каждым алгоритмом связано множество исходных данных.

Пусть *X* – исходные данные алгоритма А. Если применить алгоритм А к

9

исходным данным *X*, то возможны три исхода:

1.Применение А к *X* закончится за конечное число шагов и алгоритм А выдаст результат. В этом случае говорят, что А применим к *X*.

2. Применение А к *X* закончится безрезультатно.

3. Применение А к *X* не закончится и алгоритм будет работать бесконечно долго.

Множество исходных данных *X*, к которым применим алгоритм А, называется областью применения алгоритма А.

Машина Тьюринга

Машина Тьюринга является одним из возможных уточнений понятия алгоритма.

Машина Тьюринга имеет бесконечную вправо ленту. Лента содержит ячейки, в которые может быть записан один их символов алфавита машины. Машина имеет читающее – записывающую головку (ЧЗГ) и устройство управления (УУ).

Устройство управления может перемещать ЧЗГ вправо и влево и записывать в обозреваемые ячейки символы. Ранее записанный символ при этом стирается.

Поведение машины Тьюринга определяется состоянием УУ и символом в обозреваемой ячейке. При этом может выполняться запись в обозреваемую ячейку нового символа, который может совпадать с записанным, сдвиг ЧЗГ вправо или влево на одну ячейку или просто запись нового символа. Указанные действия записаны в программе машины Тьюринга. Из множества состояний УУ можно выделить два состояния – начальное и заключительное, обозначаемые соответственно q_1 и q_2. В процессе функционирования машины Тьюринга возможна безрезультатная остановка, когда ЧЗГ находится в крайней левой ячейке, а по программе машины требуется сдвиг ЧЗГ влево.

Машина Тьюринга задается тройкой МТ=$\{A,Q,P\}$, где:

A – алфавит машины, содержащий и символ 0;

Q – конечное множество состояний УУ, q_1 , $q_2 \in$ Q;

P – программа машины Тьюринга, содержащая следующие правила:

1. $qa \rightarrow bu$,
2. $qa \rightarrow bRu$,
3. $qa \rightarrow bLu$,

здесь $q, u \in$ Q; $a, b \in A$.

Программа определяет работу МТ.

В состоянии УУ q ($q \neq q_0$) и обозреваемом в ячейке символе a, отыскивается команде с левой частью a и осуществляются следующие действия:

- если правая часть команды u, то МТ записывает в обозреваемую ячейку b и УУ переходит в состояние u;

- если правая часть команды bRu или bLu, то МТ записывает в обозреваемую ячейку b, ЧЗГ сдвигается на одну ячейку вправо или влево, а УУ переходит в состояние u.

В состоянии МТ q_0 машина останавливается.

Пример.

Машина Тьюринга задана программой P. Определить, применима ли МТ к слову S = 111001.

$P = \{1{:}\ q_1 0 \to 0Rq_2;\ \ 2{:}\ q_1 1 \to 1Rq_1;\ 3{:}\ q_2 0 \to 0Rq_2;\ \ 4{:}\ q_2 1 \to 1Rq_3;\ \ 5{:}\ q_3 0 \to 0Lq_3;\ \ 6{:}\ q_3 1 \to 1Rq_3\}$.

Предполагается, что слово S записано, начиная с левого конца ленты. За словом S записаны нули.

Машина Тьюринга применима к слову P, если она закончит работу за конечное число шагов, пройдя все информационные ячейки не изменив их содержимого.

Вначале, расположение ЧЗГ имеет вид:

1	1	1	0	0	1	0	0	…
q_1								

Это означает, что МТ обозревает первую ячейку с записанной в ней 1, а УУ находится в состоянии q_1 . В указанной ситуации разыскивается правило №2, у которого в левой части q_1 1. По правилу №2, в обозреваемую ячейку записывается 1 согласно правой части правила и осуществляется сдвиг ЧЗГ вправо на одну ячейку. УУ переходит в состояние q_1. Результат применения имеет вид:

1	1	1	0	0	1	0	0	…
	q_1							

Далее МТ выполняет следующие действия

1	1	1	0	0	1	0	0	…
		q_1						

1	1	1	0	0	1	0	0	…

q_1

В указанном состоянии выполняется правило № 1.

1	1	1	0	0	1	0	0	…

q_2

Выполняется правило № 3

12

1	1	1	0	0	1	0	0	…

q_2

Далее по правилу №4

1	1	1	0	0	1	0	0	…

q_3

По правилу №5 получается

1	1	1	0	0	1	0	0	…

q_0

УУ переходит в состояние q_0 , которое является заключительным. МТ заканчивает работу, откуда следует, что МТ применима к слову S. До остановки МТ слово имело вид S=111001, после применения S' = 111001.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда МТ не применима к слову.

S=100111; P={ 1: $q_1 0 \to 0Rq_2$; 2: $q_1 1 \to 1Rq_2$; 3: $q_2 0 \to 0Rq_3$; 4: $q_2 1 \to 1Rq_1$; 5: $q_3 0 \to 0Rq_0$; 6: $q_3 1 \to 1Rq_2$}.

1	0	0	1	1	1	0	0	…
q_1								

1	0	0	1	1	1	0	0	…

q_2

13

1	0	0	1	1	1	0	0	…

q_3

1	0	0	1	1	1	0	0	…

q_0

Состояние q_0 является заключительным.

<u>Задания</u>

1.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0Rq_2;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_1;\ 3: \mathrm{q}_2 0 \to 0Rq_2;\ 4: q_2 1 \to 1Rq_3;\ 5: q_3 0 \to 0Lq_0;\ 6: \mathrm{q}_3 1 \to 1Rq_3\};\qquad S = 110101.$

2.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0Rq_1;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_2;\ 3: q_2 0 \to 0Lq_3;\ 4: q_2 1 \to 1Rq_1;\ 5: q_3 0 \to 0Rq_0;\ 6: q_3 1 \to 1Rq_2\};\qquad S = 111101.$

14

3.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0Lq_1;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_0;\ 3: q_2 0 \to 0Lq_3;\ 4: q_2 1 \to 1q_2;\ 5: q_3 0 \to 0Rq_0;\ 6: q_3 1 \to 1Lq_2\};\qquad \mathrm{S} = 101111.$

4.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0q_2;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_2;\ 3: q_2 0 \to 0Rq_3;\ 4: q_2 1 \to 1Rq_1;\ 5: q_3 0 \to 0Rq_0;\ 6: q_3 1 \to 1Lq_2\};\qquad S = 111101.$

5.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0q_1;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_3;\ 3: q_2 0 \to 0Rq_3;\ 4: q_2 1 \to 1\mathrm{R}\mathrm{q}_1;\ 5: q_3 0 \to 0Rq_0;\ 6: q_3 1 \to 1Lq_2\}$; $S = 110101$.

6.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0\mathrm{L}\ \mathrm{q}_3;\ 2: q_1 1 \to 1\mathrm{R}\mathrm{q}_2;\ 3: q_2 0 \to 0Lq_1;\ 4: \mathrm{q}_2 1 \to 1Rq_0;\ 5: q_3 0 \to 0Rq_0;\ 6: q_3 1 \to 1Rq_2\}$; $S = 111101$.

7.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0Rq_3;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_2;\ 3: q_2 0 \to 0q_1;\ 4: \mathrm{q}_2 1 \to 1Rq_0;\ 5: q_3 0 \to 0Lq_3;\ 6: q_3 1 \to 1Rq_2\}$; $S = 111101$.

8.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: \mathrm{q}_1 0 \to 0Lq_1;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_0;\ 3: q_2 0 \to 0Lq_3;\ 4: q_2 1 \to 1q_2;\ 5: q_3 0 \to 0\mathrm{R}\mathrm{q}_0;\ 6: q_3 1 \to 1Lq_2\}$; $S = 101001$.

9.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0\mathrm{R}\mathrm{q}_1;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_2;\ 3: \mathrm{q}_2 0 \to 0\mathrm{R}\mathrm{q}_0;\ 4: q_2 1 \to 0\mathrm{R}\mathrm{q}_1;\ 5: q_3 0 \to 0q_0;\ 6: q_3 1 \to 1Lq_1\}$; $S = 101001$.

16

10.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: q_1 0 \to 0\mathrm{R}\mathrm{q}_1;\ 2: q_1 1 \to 1\mathrm{L}\mathrm{q}_2;\ 3: q_2 0 \to 0\mathrm{L}\mathrm{q}_3;\ 4: q_2 1 \to 0\mathrm{R}\mathrm{q}_1;\ 5: q_3 0 \to 0\mathrm{R}\mathrm{q}_0;\ 6: q_3 1 \to 1Lq_3\}$; $S = 110111$.

11.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

$P = \{1: \mathrm{q}_1 0 \to 0\mathrm{R}\mathrm{q}_3;\ 2: q_1 1 \to 1Rq_2;\ 3: q_2 0 \to 0q_1;\ 4: \mathrm{q}_2 1 \to 0Rq_0;\ 5: q_3 0 \to 0\mathrm{L}\mathrm{q}_3;\ 6: q_3 1 \to 1\mathrm{R}\mathrm{q}_3\}$; $\mathrm{S} = 111101$.

12.Выяснить, применима ли машина Тьюринга к слову.

P = {1: $q_1 0 \to 0Rq_1$; 2: $q_1 1 \to 1Rq_2$; 3: $q_2 0 \to 0Lq_3$; 4: $q_2 1 \to 0Rq_1$; 5: $q_3 0 \to 0Rq0$; 6: $q_3 1 \to 1Lq_2$}; S = 101101.

Лабораторная работа №4
Реализация простейших функций на машине с неограниченным регистром

Цель работы: изучить работу машины с неограниченным регистром

Теоретическая часть

Машина с неограниченными регистрами (МНР).

Имеется некое устройство, в котором счетное число ячеек памяти (регистров), в которых хранятся целые числа.

Допустимые команды:

Z(n) - обнуление регистра Rn.

S(n) - увеличение числа в регистре Rn на 1.

T(m,n) - копирует содержимое Rm в регистор Rn.

I(p,q,n) - если содержимое Rp = Rq то выполняется команда с номером n , если нет следующая.

Программа для МНР должна быть последовательностью команд Z, S, T, I с определенным порядком, выполняемые последовательно.

Тезис Черча (Churcha): Первое и второе определение алгоритма эквивалентны между собой. Любой неформальный алгоритм может быть представлен в программе для МНР.

Задание

1. Составить программу для МНР, вычисляющую функцию f(x) = x+3.
2. Составить программу для МНР, вычисляющую функцию f(x) = 3.
3. Составить программу для МНР, вычисляющую функцию f(x, y) = x + y + 1.

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Информационная безопасность»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

ПК-1.1: Осуществляет анализ требований к программному обеспечению

ПК-1.2: Осуществляет разработку технических спецификаций на программные компоненты и их взаимодействие;

ПК-1.3: Проводит проектирование программного обеспечения

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Информационная безопасность» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно-справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать

внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Тема работы и краткое содержание	Количество часов
1	Информация и Безопасность: основные определения. Понятие Информа- ционной безопасности. Основные составляющие информационной безопасности. Важность и сложность проблемы информационной безопасности	8
2	Наиболее распространенные угрозы информационной безопасности. Основные определения и критерии классификации угроз. Наиболее распространенные угрозы доступности. Некоторые примеры угроз доступности. Вредоносное программное обеспечение. Основные угрозы целостности. Примеры угроз целостности. Основные угрозы конфиденциальности	8
3	Что такое законодательный уровень информационной безопасности и почему он важен. Обзор российского законодательства в области информационной безопасности. Обзор зарубежного законодательства в области информационной безопасности. О текущем состоянии российского законодательства в области информационной безопасности	10
4	Стандарты и спецификации в области информационной безопасности. Оценочные стандарты и технические спецификации. «Оранжевая книга» как оценочный стандарт. Информационная безопасность распределенных систем. Рекомендации X.800. Стандарт ISO/IEC 15408. Гармонизированные критерии Европейских стран. Интерпретация «Оранжевой книги» для сетевых конфигураций. Руководящие документы Гостехкомисии России	10
5	Простые числа. Арифметика в классах вычетов. Методики получения больших простых чисел. Теорема Ферма. Теорема Эйлера. Основные алгоритмы.	6
6	Структура симметрично шифрования. Структура сети Фейстеля. Режимы симметричного шифрования. Выбор алгоритма AES	8

7	Основы асимметричного шифрования. Функции с тайным ходом. Алгоритмы ассиметричного шифрования.	6
8	Хэш-функции. Применение Хэш- функции. Требования к Хэш-функциям и способы их формирования. Цифровая подпись и MAC.	4
9	Понятие протокола. Протоколы с посредником и арбитром. Универсальные протоколы. Криптографические протоколы. Применение протоколов.Протокол KERBEROS.	12
ВСЕГО		74

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210x297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Межплатформенное программирование»

Специальность 09.03.02 Информационные системы и технологии

Азов
202_

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- **ПК-3.1:** Разрабатывает архитектуру и базы данных информационной системы;
- **ПК-3.2:** Осуществляет организационное и технологическое обеспечение кодирования на языках программирования;
- **ПК-3.3:** Выполняет оптимизацию работы информационной системы.

— Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Межплатформенное программирование» по специальности 09.03.02 «Информационные системы и технологии»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Межплатформенное программирование». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно-справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать

внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Простые и составные операторы. Использование многомерных массивов. Практическое изучение использования функций.№1	56
Изучение вариантов составления структур. Простые и управляющие операторы. Изучение команд препроцессора и функций пользователя. Файлы и работа с ними. №2	66
	112

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210x297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) ДГТУ в г. Азове

Кафедра «Вычислительная техника и программирование»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Методы и средства решения стандартных задач профессиональной деятельности»

Направление 09.03.02 Информационные системы и технологии

Азов
202__

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- ОПК-4.1: Применяет требования отраслевой нормативно-правовой технической документации;
- ОПК-4.2: Проводит анализ, проектирует стандарты, нормы, правила и составляет техническую документацию в процессе реализации проектов информационных систем;
- ОПК-8.1: Выполняет сбор данных для построения математической модели, проводит построение и анализ модели в процессе проектирования информационных систем;
- ОПК-8.2: Выполняет анализ и выбор методов и средств проектирования информационных и автоматизированных систем;
- ОПК-8.3: Осуществляет процесс проектирования информационных и автоматизированных систем.

2. Методические указания по использованию электронной образовательной среды

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым сайта ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове.

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;

– наименования лекционных разделов курса;

– темы практических работ;

– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам рекомендуется в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

3. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

Перед изучением дисциплины студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы

- методическими разработками по данной дисциплине

-с графиком консультаций преподавателей.

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет.

Студентам необходимо перед каждым теоретическим занятием просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины. В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться:

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-в электронной библиотеке. Режим доступа: ntb.donstu.ru

4. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– до очередного лабораторного занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Целью дисциплины является изучение основных понятий, методов, средств и технологий проектирования современных информационных систем, методологий моделирования предметных областей и информационного обеспечения информационных систем, а также вопросов эксплуатации современных информационных систем.

1. Цель лабораторных работ

Цикл лабораторных работ использует CASE-средство структурного анализа AllFusionProcessModeler 4.1 (BPwin 4.1) для обучения студентов технологии составления диаграмм по стандартам DFD, IDEF0, IDEF3, а также CASE-средство AllFusionERwinDataModeler для преобразования моделей данных БД в классовые модели по стандарту UML.

2. Методические аспекты автоматизированного проектирования ИС

2.1. Назначение CASE-технологий.

CASE(**C**omputer-**A**ided**S**oftware/**S**ystem**E**ngineering)-**технология** представляет собой совокупность методов анализа, проектирования, разработки и сопровождения информационных систем (ИС), поддержанную комплексом взаимоувязанных средств автоматизации. CASE – это инструментарий для системных аналитиков, разработчиков и программистов, заменяющий им бумагу и карандаш на компьютер для автоматизации процесса проектирования и разработки программного обеспечения (ПО). Очевидно, автоматизация процесса создания ПО предполагает наличие формализованной процедуры разработки, то есть процедуры, в которой однозначно определены этапы разработки, методы, используемые на каждом этапе, способы документирования решений, проверки их правильности и т.д.

Большинство CASE-средств основано на парадигме методология/метод/нотация/средство. *Методология* определяет руководящие указания для оценки и выбора проекта разрабатываемого ПО, шаги работы и их последовательность, а также правила распределения и назначения методов и исполнителей. *Метод* – это систематическая процедура или техника генерации описаний компонент ПО (например, проектирование потоков и структур данных). *Нотации* предназначены для описания структуры системы, элементов данных, этапов обработки и включают графы, диаграммы, таблицы, блок-схемы, формальные и естественные языки. *Средства* – инструментарий для поддержки и усиления методов. Например, поддержка работы пользователей при создании и редактировании графического проекта в интерактивном режиме и др.

В основе деятельности по созданию и использованию ПО лежит понятие его *жизненного цикла (ЖЦ).* ЖЦ является моделью создания и использования ПО, отражающей его различные состояния, начиная с момента возникновения необходимости в данном программном изделии и заканчивая моментом его полного выхода из употребления у всех пользователей.

CASE-средство – программное средство, поддерживающее процессы ЖЦ ПО, определенные в стандарте ISO/IEC 12207:1995.

Традиционно выделяются следующие основные этапы ЖЦ ПО:

- ***анализ требований,***
- ***проектирование,***
- ***кодирование (программирование),***
- ***тестирование и отладка,***
- ***эксплуатация и сопровождение.***

Анализ требований выделяется в отдельный этап, то есть этой проблеме придается большое значение при создании программных продуктов. Считается, что именно здесь лежит ключ к успеху разработки. На этом этапе дается ответ на вопрос, что должна делать создаваемая система, то есть каковы ее функции, условия их выполнения, особенности взаимодействия с пользователями и другими системами. Безусловно, что этот этап основан на творческой работе разработчика (системного аналитика). CASE-технология должна помочь ему четко представить все особенности создаваемой системы и также четко и однозначно выразить требования к ней.

Также основная цель CASE состоит в том, чтобы отделить проектирование ПО от его кодирования и последующих этапов разработки, а также скрыть от разработчиков все детали среды разработки и функционирования ПО. Это связано с тем, что при четком изложении того, что и как должна делать система, процесс написания программы (кодирования) может быть автоматизирован (частично или полностью). Поэтому особое значение приобретает именно этап проектирования, где требуется творческое участие разработчика.

Этапы анализа требований и проектирования, являющиеся наиболее трудно формализуемыми, как раз и явились теми, где CASE-технологии получили наибольшее распространение.

2.2. Понятие о структурном анализе

Существующие CASE-средства основаны на методологиях структурного или объектно-ориентированного анализа и проектирования, использующих спецификации в виде диаграмм или текстов для описания внешних требований, связей между моделями системы, динамики поведения системы и архитектуры программных средств.

*Структурным анализом (*структурным подходом*)* принято называть метод исследования системы, представленной как совокупность взаимодействующих функций или работ, который начинается с ее общего обзора и затем детализируется, приобретая иерархическую структуру со все большим числом уровней. Для таких методов характерно разбиение на уровни абстракции с ограничением числа элементов на каждом из уровней (обычно от 3 до 6-7); ограниченный контекст, включающий лишь существенные на каждом уровне детали; дуальность данных и операций над ними; использование строгих формальных правил записи; последовательное приближение к конечному результату.

В основе объектно-ориентированного подхода лежит объектная декомпозиция, при этом статическая структура системы описывается в терминах объектов и связей между ними, а поведение системы – в терминах обмена сообщениями между объектами.

В рамках первой части курса лабораторных работ используется методология структурного анализа.

2.3. Средства структурного анализа и их взаимоотношения

Для целей моделирования систем вообще, и структурного анализа в частности, используются *три группы средств*, иллюстрирующих:

- функции, которые система должна выполнять (функциональное моделирование);
- отношения между данными (информационное моделирование);
- зависящее от времени поведение системы (динамическое моделирование).

Каждой группе средств соответствуют определенные *виды моделей (диаграмм)*:

- Функциональное моделирование: DFD (DataFlowDiagrams) – диаграммы потоков данных, IDEF0 (IntegratedDEFinition) – функциональная модель;
- Информационное моделирование: ERD (EntityRelationshipDiagrams) – диаграммы “сущность - связь”;
- Динамическое моделирование: STD (StateTransitionDiagrams) – диаграммы переходов состояний, IDEF3 (WorkFlowDiagrams), IDEF0 PN (PetriNetwork) – сети Петри.

В рамках данного цикла рассмотрим IDEF0, DFD, IDEF3 –модели и возможность получения ERD-модели по DFD или IDEF0-модели.

Схематически взаимоотношение моделей приведено на рис.2.1.

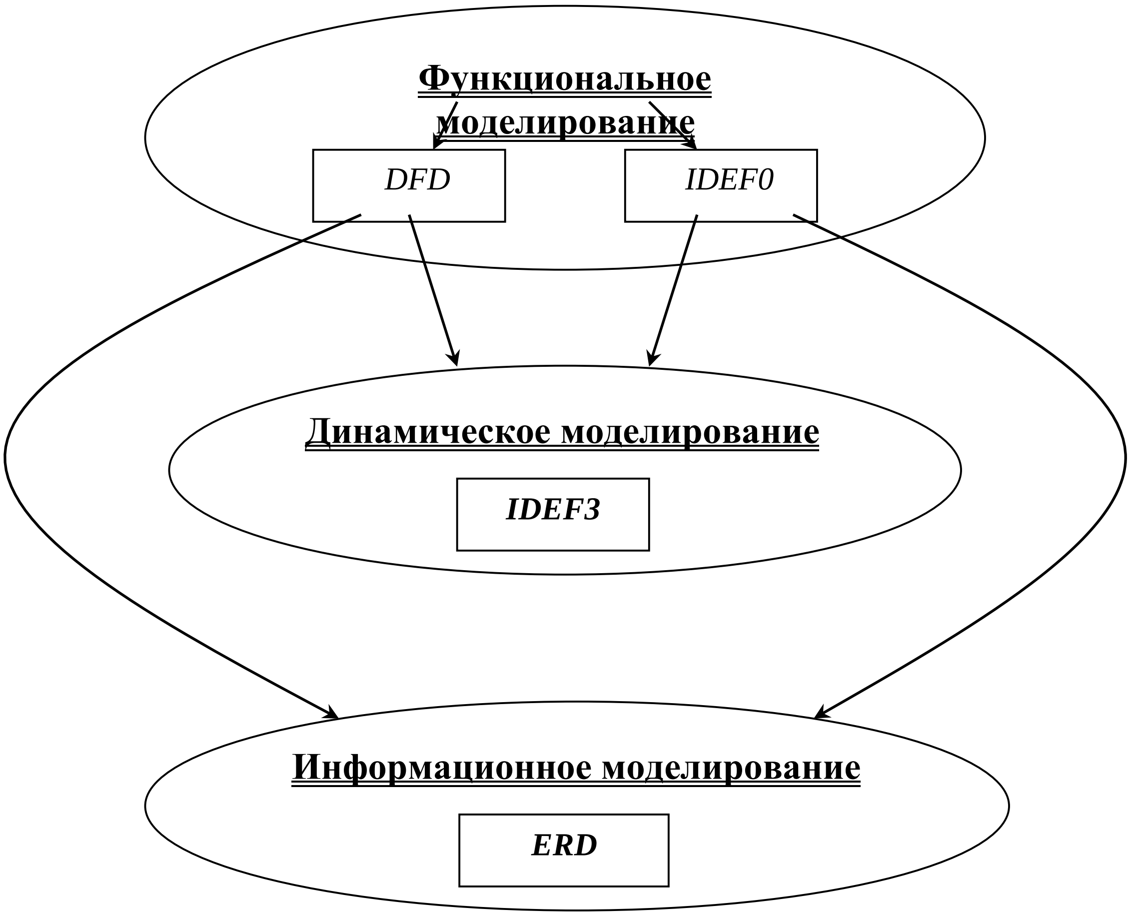


Рис.2.1. Взаимоотношение моделей в структурном подходе.

2.4. Структурный анализ потоков данных (DataFlowDiagrams – DFD)

Диаграммы потоков данных (DFD, DataFlowDiagrams) являются основным средством моделирования функциональных требований проектируемой системы. С их помощью эти требования разбиваются на функциональные компоненты (процессы) и представляются в виде сети, связанной потоками данных. Главная цель таких средств - продемонстрировать, как каждый процесс преобразует свои входные данные в выходные, а также выявить отношения между этими процессами.

Для изображения DFD традиционно используется две различные нотации: Йордана и Гейна-Сарсона. Далее при построении будет использоваться нотация Гейна-Сарсона.

В основе методологии Гейна-Сарсона лежит построение модели анализируемой ИС - проектируемой или реально существующей. В соответствии с методологией модель системы определяется как иерархия диаграмм потоков данных (ДПД / DFD), описывающих асинхронный процесс преобразования информации от ее ввода в систему до выдачи пользователю. Диаграммы верхних уровней иерархии (контекстные диаграммы) определяют основные процессы или подсистемы ИС с внешними входами и выходами.

Они детализируются при помощи диаграмм нижнего уровня. Такая декомпозиция продолжается (создавая многоуровневую иерархию диаграмм) до тех пор, пока не будет достигнут такой уровень декомпозиции, на котором процессы становятся элементарными и детализировать их далее невозможно.

Методология структурного анализа и проектирования базируется на интеграции следующих средств:

- *DFD-диаграмм потоков данных*, которые являются графическими иерархическими спецификациями (описаниями) систем с позиций потоков данных. Основные символы DFD в нотации Гейна-Сарсона приведены в таблице 1.

Таблица 1. Нотация Гейна-Сарсона.

Компонент	**Графическое представление**	**Назначение**
Поток данных (Arrow)		Потоки данных описывают движение объектов из одной части системы в другую.
Процесс (Activity)		Назначение процесса состоит в продуцировании выходных потоков из входных в соответствии с действием, задаваемым именем процесса.
Хранилище (DataStore)		Хранилище данных позволяет на определенных участках определять данные, которые будут сохраняться в памяти между процессами.
Внешняя сущность (ExternalReference)		Внешняя сущность представляет сущность вне контекста системы, являющуюся источником или приемником данных системы. Предполагается, что объекты, представленные такими узлами, не должны участвовать ни в какой обработке.

Источники информации (внешние сущности) порождают информационные потоки (потоки данных), переносящие информацию к подсистемам или процессам. Те в свою очередь преобразуют информацию и порождают новые потоки, которые переносят информацию к другим процессам или подсистемам, хранилищам данных (ХД) или внешним сущностям -

потребителям информации. Потоки могут подходить и выходить из любой грани прямоугольника работы и могут быть двунаправленными для описания взаимодействия типа “запрос-ответ” (рис.2.2).

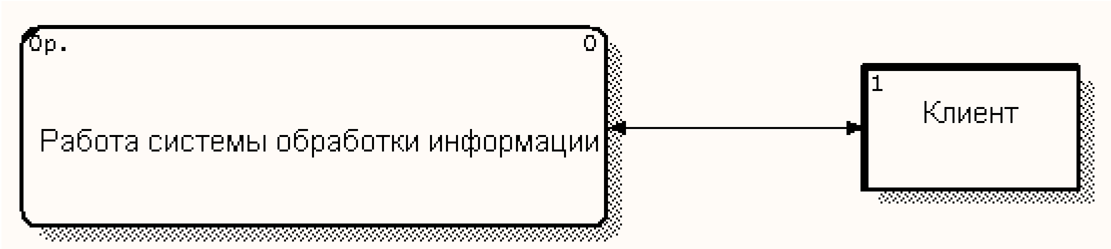


Рис.2.2. Взаимодействие типа “запрос-ответ”.

- *Словарей данных (репозиториев)*, использующихся для хранения метаданных (структуры потоков данных, ХД), описания их компонентов. Для определения статей словаря данных используется специальный язык Бэкуса-Наура.
- *Спецификаций процессов,* использующихся для описания функционирования процесса в случае отсутствия необходимости детализировать его с помощью DFD. Фактически спецификации процессов представляют собой алгоритмы описания задач, выполняемых процессами: множество всех спецификаций является полной спецификацией системы. Для описания тела процесса будем использовать структурированный естественный язык (СЕЯ).

2.5. Метод функционального моделирования IDEF0

IDEF0, ранее известная как технология структурированного анализа и разработки (SADT - Structured Analysis and Design Technique), является стандартом технологии моделирования процессов. DFD-модель создавалась как средство проектирования ИС, тогда как назначение модели IDEF0 состоит в документировании и пересмотре назначения и состава функций для повышения эффективности функционирования организации.

Описание системы с помощью IDEF0 называется функциональной моделью. Функциональная модель предназначена для описания бизнес-процессов. Бизнес-процесс определяется как логически завершенный набор взаимосвязанных и взаимодействующих видов деятельности, поддерживающий деятельность организации и реализующий ее политику, направленную на достижение определенного результата, представляющего ценность для потребителя. Бизнес-процесс в узком смысле можно определить как набор связанных процедур. Одной из основных идей IDEF0-моделей является построение двух видов моделей: “как есть” (AS-IS) и “как должно быть” (AS-TO-BE). Это нужно при проведении реинжиниринга бизнес-процессов организации. При проведении сложных проектов обследования предприятий, разработка моделей в стандарте IDEF0 позволяет наглядно и эффективно отобразить весь механизм деятельности предприятия в нужном разрезе. В результате получается IDEF0-модель предприятия по принципу “Как есть”. В дальнейшем, эта модель будет передана на анализ и обработку к бизнес-аналитикам, которые будут заниматься поиском “узких мест” в управлении компанией и оптимизацией основных процессов, трансформируя модель “Как есть” в соответствующее представление “Как должно быть”. На основании этих изменений и выносится итоговое заключение, которое содержит в себе рекомендации по реорганизации системы управления. Переход от модели “AS-IS” к модели “AS-TO-BE” может выполняться двумя способами:

1) совершенствованием существующих технологий на основе оценки их эффективности;
2) радикальным изменением технологий и перепроектированием (реинжинирингом) бизнес-процессов.

Модели проектируемой системы, которые строятся на основе модели “AS-TO-BE”, уточняются и детализируются до необходимого уровня.

В IDEF0-технологии проектируемая система представляется иерархически упорядоченным множеством функциональных диаграмм, отображающих на каждом уровне выполняемые функции и информационные связи между функциями, а также между функцией и внешней средой.

В основе методологии лежат четыре основных понятия.

Первым из них является понятие **функционального блока (Activity)**. Функциональный блок графически изображается в виде прямоугольника (см. рис. 2), означающими поименованные процессы, функции или задачи, которые происходят в течение определенного времени и имеют распознаваемые результаты.

Каждая из четырех сторон функционального блока имеет свое определенное назначение (роль): верхняя сторона предназначена для ***управления (Control)***; левая сторона – для ***входов (Input)***; правая сторона - для ***выходов (Output)***; нижняя сторона - для ***механизмов (Mechanism)*** (рис.2.3).

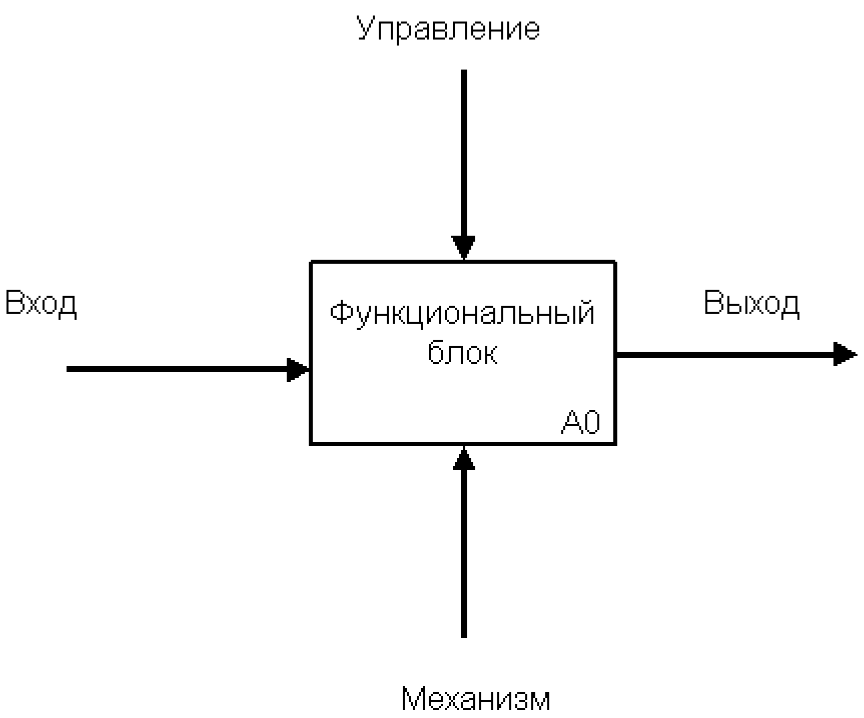


Рис.2.3. Функциональный блок.

Такое обозначение отражает системные принципы: входы преобразуются в выходы, управление ограничивает или предписывает условия выполнения преобразований, механизмы показывают, что и как выполняет функция.

Вторым понятием методологии IDEF0 является понятие **интерфейсной дуги (Arrow)**. Она описывает взаимодействие работ с внешним миром и между собой. Графическим отображением интерфейсной дуги является однонаправленная стрелка.

В IDEF0 различают пять видов стрелок:

- Вход – информация и материалы, используемые и преобразуемые работой для получения результата (выхода). Допускается, что работа может не иметь ни одной стрелки входа. Стрелка входа рисуется как входящая в левую грань работы.
- Управление – информация, управляющая действиями работы. Обычно управляющие стрелки несут информацию, которая указывает, что должна выполнять работа. Каждая работа должна иметь хотя бы одну стрелку управления, которая изображается как входящая в верхнюю грань работы.
- Выход – информация и материалы, в которые преобразуются входы. Каждая работа должна иметь хотя бы одну стрелку выхода, которая рисуется как исходящая из правой грани работы.
- Механизм – ресурсы, необходимые для выполнения работы. Стрелка механизма рисуется как входящая в нижнюю грань работы. По усмотрению аналитика могут не изображаться на модели.

- Вызов – специальная стрелка, указывающая на другую модель работы. Стрелка вызова рисуется как исходящая из нижней грани работы и используется для указания того, что некоторая работа выполняется за пределами моделируемой системы.

Третьим основным понятием стандарта IDEF0 является **декомпозиция (Decomposition)**. Принцип декомпозиции применяется при разбиении сложного процесса на составляющие его функции. При этом уровень детализации процесса определяется непосредственно разработчиком модели.

Декомпозиция позволяет постепенно и структурированно представлять модель системы в виде иерархической структуры отдельных диаграмм, что делает ее менее перегруженной и легко усваиваемой.

Последним из понятий IDEF0 является **глоссарий (Glossary)**. Для каждого из элементов IDEF0: диаграмм, функциональных блоков, интерфейсных дуг существующий стандарт подразумевает создание и поддержание набора соответствующих определений, ключевых слов, повествовательных изложений и т.д., которые характеризуют объект, отображенный данным элементом. Этот набор называется глоссарием и является описанием сущности данного элемента. Глоссарий гармонично дополняет наглядный графический язык, снабжая диаграммы необходимой дополнительной информацией.

2.6. Метод описания бизнес-процессов IDEF3

IDEF3 – способ описания процессов с использованием структурированного метода, позволяющего представить положение вещей как упорядоченную последовательность событий с одновременным описанием объектов, имеющих непосредственное отношение к процессу. IDEF3 используют для описания логики взаимодействия информационных потоков.

В отличие от большинства технологий моделирования бизнес-процессов, IDEF3 не имеет жестких синтаксических и семантических ограничений, делающих неудобным описание неполных или нецелостных систем.

IDEF3 может быть использован как метод проектирования бизнес-процессов. IDEF3-моделирование органично дополняет традиционное моделирование с использованием стандарта IDEF0 и содержит все необходимое для построения моделей, которые могут быть использованы для имитационного моделирования.

Диаграмма является основной единицей описания в IDEF3-модели.

Единицы работы **–** *UnitofWork(UOW)*, также называемые работами, являются центральными компонентами модели. Изображаются прямоугольниками и имеют имя и номер (рис.2.4).

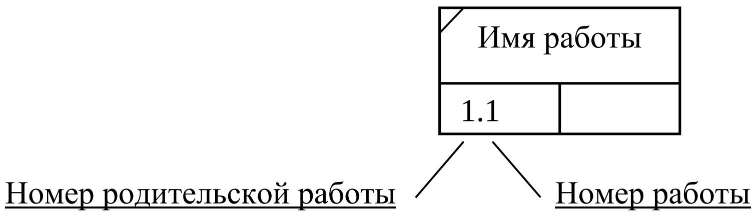
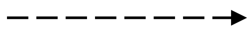
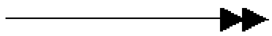


Рис.2.4.Изображение работы в диаграмме IDEF3.

Связи показывают взаимоотношения работ. Все связи в IDEF3 являются однонаправленными.

Таблица 2. Типы связей.

Тип связи	**Графическое представление**	**Назначение**
Временное предшествование (TemporalPrecedence).		Соединяет последовательно выполняемые работы.
Нечеткое отношение (Relationship).		Используется для изображения связей между единицами работ, а также между единицами работ и объектами ссылок.
Объектный поток (ObjectFlow).		Применяется для описания использования объекта в двух или более единицах работы.

Перекрестки (Junction) используются для отображения логики взаимодействия потоков при слиянии и разветвлении или для отображения множества событий, которые могут или должны быть завершены перед началом следующей работы.

Различают перекрестки для слияния (Fan-inJunction) и разветвления (Fan-outJunction) потоков. Перекресток не может быть использован одновременно для слияния и разветвления.

Таблица 3. Типы перекрестков.

Наименование	**Обозначение**	**Смысл в случае слияния потоков**	**Смысл в случае разветвления потоков**
Asynchronous AND	&	Все предшествующие процессы должны быть завершены.	Все следующие процессы должны быть запущены.
Synchronous AND	&	Все предшествующие процессы должны быть завершены одновременно.	Все следующие процессы запускаются одновременно.
Asynchronous OR	O	Один или несколько предшествующих процессов должны быть завершены.	Один или несколько следующих процессов должны быть запущены.
Synchronous OR	O	Один или несколько предшествующих процессов должны быть завершены одновременно.	Один или несколько следующих процессов запускаются одновременно.
XOR (Exclusive OR)	X	Только один предшествующий процесс завершен.	Только один следующий процесс запускается.

Объекты-ссылки являются специальными символами, которые ссылаются на внешние части процесса. Они добавляются на диаграмму для того, чтобы обратить внимание на что-либо важное, что невозможно связать со стрелкой, работой или перекрестком. Официальная спецификация IDEF3 различает три стиля объектов-ссылок – безусловные (unconditional), синхронные (synchronous) и асинхронные (asynchronous). BPwin поддерживает только безусловные объекты-ссылки. При внесении объектов-ссылок необходимо указать их тип.

Таблица 4. Типы объектов-ссылок.

Тип объекта-ссылки	Цель описания
OBJECT	Описывает участие важного объекта в работе.
GOTO	Инструмент циклического перехода (в повторяющейся последовательности работ), возможно на текущей диаграмме, но не обязательно. Если все работы цикла присутствуют на текущей диаграмме, цикл может также изображаться стрелкой, возвращающейся на стартовую работу. GOTO может ссылаться на перекресток.
UOB (Unit of behavior)	Применяется, когда необходимо подчеркнуть множественное использование какой-либо работы, но без цикла. Обычно этот тип ссылки не используется для моделирования автоматически запускающихся работ.
NOTE	Используется для документирования важной информации, относящейся к каким-либо графическим объектам на диаграмме. NOTE является альтернативой внесению текстового объекта в диаграмму.
ELAB (Elaboration)	Используется для усовершенствования графиков или более детального описания. Обычно употребляется для детального описания разветвления и слияния стрелок на перекрестках.

Объекты-ссылки должны быть связаны с единицами работ или перекрестками пунктирными линиями.

Рассмотрим пример. На стадии разработки технического задания заказчик системы играет важную роль, снабжая разработчиков необходимой информацией для создания системы. Поэтому на диаграмме показан соответствующий объект-ссылка “Заказчик”, влияющий на работу “Разработка технического задания” (рис.2.5).

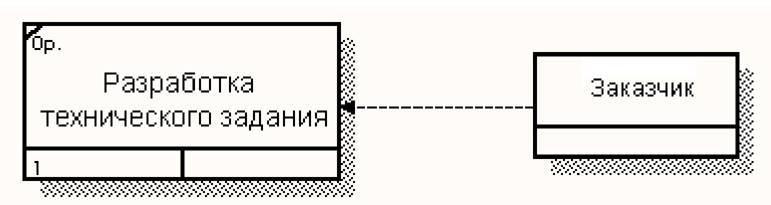


Рис.2.5. Использование объекта-ссылки на диаграмме.

3. Описаниепакета AllFusion Modeling Suite

В этот пакет входит 5 продуктов:

1. AllFusion Process Modeler 4.1 (BPwin 4.1);
2. AllFusion ERwin Data Modeler 4.1 (ERwin 4.1);
3. AllFusion Data Model Validator 4.1 (ERwin Examiner);
4. AllFusion Model Manager 4.1 (ModelMart 4.1);
5. AllFusion Component Modeler 4.1 (Paradigm Plus).

Данное учебное пособие посвящено изложению основ методологии функционального моделирования и построению моделей DFD, IDEF0, IDEF3 с помощью AllFusionProcessModeler.

3.1. Общие сведения

Для проведения анализа и реорганизации бизнес-процессов фирма ComputerAssociates предлагает CASE-средство **AllFusionProcessModeler 4.1 (BPwin 4.1)**, поддерживающее методы ***IDEF0*** (функциональная модель), ***IDEF3*** (WorkFlowDiagram) и ***DFD*** (DataFlowDiagram).

Таким образом, BPwin объединяет три ключевых подхода к моделированию бизнес-процессов, что вполне удовлетворяет потребности как системных аналитиков, так и специалистов-технологов.

Модель в BPwin представляет собой совокупность диаграмм, каждая из которых описывает отдельный процесс в виде разбиения его на шаги и подпроцессы. С помощью соединяющих дуг описываются объекты, данные и ресурсы, необходимые для выполнения функций. Имеется возможность для любого процесса указать стоимость, время и частоту его выполнения. Эти характеристики в дальнейшем будут использованы с целью вычисления общей стоимости затрат.

Функциональность BPwin заключается не только в рисовании диаграмм, но и в проверке целостности (непротиворечивости, согласованности) диаграмм различных уровней. BPwin обеспечивает логическую четкость в определении и описании элементов диаграмм, а также проверку целостности связей между диаграммами. Инструмент обеспечивает коррекцию наиболее часто встречающихся ошибок при построении модели, таких, как “зависание” связей при переходе от диаграммы к диаграмме, нарушение ассоциации связей в различных диаграммах модели и т.п. Кроме того, BPwin позволяет включить в модель описания специфических свойств, присущих каждому элементу.

BPwin имеет широкие возможности по представлению диаграмм. Графическое представление модели может быть выполнено с использованием различных цветов, шрифтов и прочих средств, с помощью которых выделяют важные или, наоборот, тушируют незначительные аспекты модели. Эта, незначительная на первый взгляд, возможность является ключевой во время представления и обсуждения модели с заказчиком или экспертами проблемной области, т.к. правильно подобранное графическое представление позволяет им быстрее сориентироваться в модели.

BPwin позволяет связывать элементы модели процессов и модели данных, созданной с помощью средства проектирования баз данных ERwin, документировать влияние работ на данные.

Для создания документации на основе модели процессов можно воспользоваться встроенными генераторами отчетов. Отчеты обычно сопровождают окончательный вариант модели, созданный при помощи BPwin, и содержат информацию, размещение которой на модели сделало бы ее трудной для восприятия. Например, отчет может содержать подробное описание каждого элемента диаграммы, что помогает отчетливо себе представить назначение данного элемента без дополнительных разъяснений со стороны системного аналитика, создававшего диаграмму. Кроме того, существуют отчеты, которые предназначены для самого аналитика (например, отчет по целостности модели).

Для коллективной разработки модели процессов и модели данных предназначен специальный продукт ModelMart. BPwin имеет специальную дополнительную панель инструментов для работы с ModelMart.

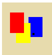
3.2. Инструментарий BPwin

При запуске BPwin по умолчанию появляется стандартная панель инструментов (StandardToolbar), панель инструментов BPwin (BPwinToolbox) и дерево модели (ModelExplorer).

Функциональность *стандартной панели инструментов* доступна из главного меню BPwin (рис.3.1).

Рис.3.1. Главное меню BPwin.

Таблица 5.Описание элементов управления стандартной панели инструментов.

Элемент управления	Описание	Соответствующий пункт меню
	Создать новую модель	File → New… (Ctrl+N)
	Открыть модель	File→Open…(Ctrl +O)
	Сохранить модель	File→Save (Ctrl+S)
	Напечатать модель	File → Print… (Ctrl+P)
	Создатьотчет	Tools → Report Builder → Report Builder…
	Выбор масштаба	View→Zoom…
	Масштабирование	View→Zoom…
	Проверка правописания	Tools→Spelling (F7)
	Включение/выключение навигатора модели ModelExplorer	View → Model Explorer
	Включение/выключение дополнительной панели инструментов ModelMart	View → ModelMart Toolbar

Также из *главного меню* доступны следующие возможности:

File→Export… позволяет сохранить палитру цветов, записать в отдельный файл описание сущностей и их атрибутов;

File→Import… - возможность использовать ранее сохраненные палитру, словари данных и т.д.;

Edit → Go To Activity…/ Go To Diagram… -переходквыбранномупроцессу/ диаграмме;

Edit→DeleteDiagram… служит для удаления любого уровня детализации диаграммы;

Diagram→DiagramProperties… служит для создания описаний каждой диаграммы;

Diagram→DiagramManager - переход к выбранной диаграмме;

Diagram→AddNodeTree… - представление структуры модели в целом в виде дерева с определенным числом уровней;

Diagram→AddFEODiagram… - создание диаграммы "только для представления";

Dictionary – пункт меню, из которого можно открыть словари объектов диаграммы (процессов, потоков данных, хранилищ данных, внешних сущностей, перекрестков и т.д.);

Model→ModelProperties… служит для создания описаний модели в целом;

Model→ArrowData… определяет информацию, которую переносит информационный поток о конкретных сущностях и их атрибутах.

Model→DiagramObjectEditor… - здесь даются описания (Definition) объектов диаграммы (процессов, потоков данных, хранилищ, внешних сущностей), указывается источник информации (Source) об объекте и приводятся замечания (Note).

Model→ArrowEditor… позволяет дать текстовое описание информационного потока;

Model→Entity/AttributeEditor… - здесь описываются все сущности проблемной области и их атрибуты. Имеется возможность дать текстовое описание (Definition) каждой сущности и ее атрибутов. Послезаполнения**Entity/Attribute Editor** можноиспользовать**Arrow Editor** и**Arrow Data;**

Model→UDP (UserDefinedProperties) DefinitionEditor… - здесь пользователь имеет возможность задать категории (понятия), а также определенные свойства для каждой категории. Например, железная дорога – это категория, которая имеет свойства: название дороги, ФИО начальника и т.д.;

Model→CostCenterEditor… следует использовать при оценке стоимости реализации любого процесса;

ModelMart – пункт меню, используемый при коллективном проектировании, при этом применяется специальный продукт – ModelMart;

Tools→ReportBuilder…/ Tools→Reports… - дает возможность конструировать отчеты о модели в целом, одной из диаграмм, о процессах, потоках данных и т.д. После задания требуемых параметров для отчета его можно посмотреть, распечатать или сохранить в файле (*.txt, *.rtf, *.html).

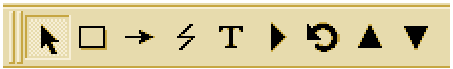
BPwin поддерживает три методологии – IDEF0, IDEF3, DFD. Возможно построение смешанных моделей, т.е. модель может содержать одновременно как IDEF0, так и IDEF3 и DFD. Работы в нотации IDEF0 изображаются зеленым цветом, IDEF3 – желтым, DFD – голубым. BPwin допускает следующие переходы с одной нотации на другую:

- IDEF0 → DFD;
- IDEF0 → IDEF3;
- DFD→IDEF3.

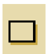
Состав *панели инструментов BPwin* изменяется автоматически, когда происходит переключение с одной нотации на другую.

Для построения диаграмм в BPwin используется три панели инструментов для каждого типа диаграмм.

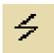
Диаграммы IDEF0

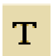


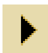
 - инструмент редактирования объектов;

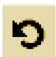
 - кнопка для добавления работы на диаграмму;

 - проведение новой дуги;

 - привязка имени потока к дуге, обозначающей этот поток;

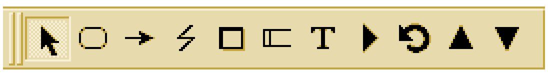
 - размещение текстовой информации на диаграмме;

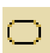
 - быстрый переход на нужный уровень детализации;

 - переключение между диаграммами одного уровня;

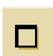
 и  - переход соответственно на более высокий и более низкий уровень детализации. Во втором случае указывается еще и тот процесс, к детализации которого требуется перейти.

Диаграммы DFD



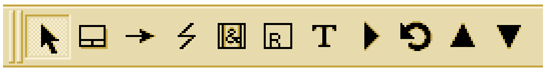
 - добавление процесса на диаграмму;

 - добавление потока данных;

 - добавление внешней сущности;

 - добавление хранилища данных.

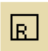
Диаграммы IDEF3



 - добавление работы на диаграмму;

 - добавление связи типа “временное предшествование” (по умолчанию);

 - добавление перекрестка;

 - добавление объекта-ссылки.

3.3. Групповая разработка моделей данных и моделей процессов с помощью AllFusionModelManager (ModelMart)

В рамках современного подхода к разработке информационных систем практически не осталось места профессионалам-одиночкам (хотя таковые еще встречаются). Сейчас все решает правильная организация коллективной работы, в которой задействованы десятки, сотни специалистов различных направлений, в том числе бизнес-аналитики и проектировщики баз данных.

BPwin и ERwin, при всех их достоинствах, являются индивидуальными средствами разработки моделей. Трудно представить себе коллективную работу, где в качестве источника информации выступает файл (в данном контексте имеется в виду одновременный доступ к файлу с возможностью его изменения).

Для разрешения подобных проблем и служит ModelMart, который относится к программным продуктам группы Model management system (система управления моделями). Он позволяет организовать коллективную работу с моделями BPwin и ERwin, поскольку только они имеют возможность сохранять свои модели в репозитарии ModelMart. Принцип работы с ModelMart состоит в том, что модель сохраняется не в файл, а в репозитарий ModelMart. Использованный термин «репозитарий» означает хранилище информации.

В состав пакета ModelMart входят:

- *Клиентская часть* — интегрирована непосредственно в ERwin и BPwin и доступна пользователю через пункт меню ModelMart или специальную панель инструментов. Функциональность данного пункта меню становится доступной лишь после соединения с репозитарием ModelMart.

- *Серверная часть (репозитарий)* — хранилище моделей, организованное в базе данных. Поддерживает работы со следующими серверами баз данных:

  - Oracle;
  - Microsoft SQL Server;
  - Sybase;
  - Informix.

Если рассматривать состав серверной части репозитария на примере сервера БД ORACLE, то она состоит из таблиц, процедур и последовательностей. Особенностью является полное отсутствие ссылочной целостности, что характерно для многих хранилищ.

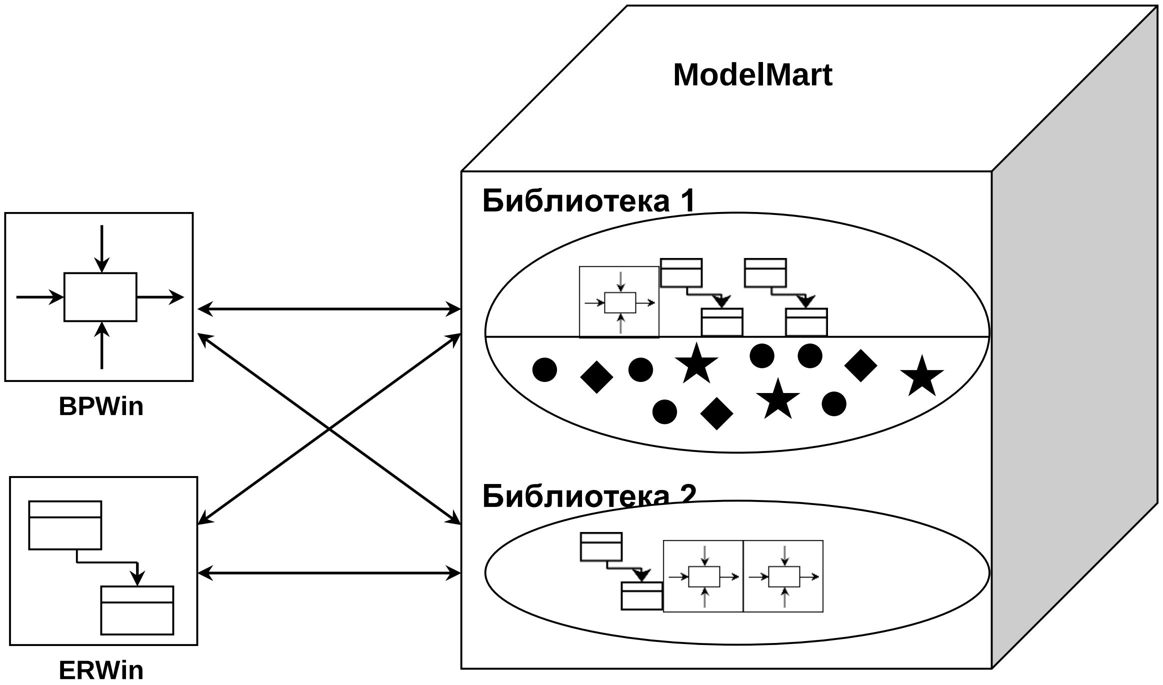
- *Утилита администрирования предназначена для организации прав доступа пользователей к ModelMart*.
- *Утилита синхронизации моделей BPwin и ERwin. О ее назначении говорит само название*.

Как уже отмечалось выше, ModelMart является средой многопользовательской разработки моделей и, следовательно, должен удовлетворять требованиям, предъявляемым к инструментам для групповой работы. К ним относятся:

- одновременная работа нескольких пользователей;
- разрешение конфликтных ситуаций;
- разграничение прав доступа.

Все это поддерживается в ModelMart, для чего в нем существуют соответствующие компоненты системы.

1. Управление библиотеками (Library Manager). Хранилище разделено логически на библиотеки (Library). Каждая библиотека может содержать целиком модели BPwin и ERwin, также фрагменты модели ERwin (объекты уровня библиотеки, рис.3.2). Кроме моделей ModelMart сохраняет в библиотеках автоматически создаваемые версии (Version – полные копии моделей ERwin и BPwin) и отмеченные версии (MarkedVersion – временные копии модели), архивы и «моментальные снимки».


ModelMart
Библиотека 1
Библиотека 2
BPWin
ERWin

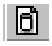
- объекты библиотеки

Рис.3.2. Общая схема работы ModelMart

Разделение информации на библиотеки позволяет осуществить некоторую группировку моделей по определенным условиям, особенно с учетом того, что часть объектов модели (домены, ограничения и т.п.) относятся не к модели, а к библиотеке. Редактор библиотек позволяет создавать и удалять библиотеки, а также производить некоторые другие операции. При создании новой модели необходимо указать, в какой библиотеке она будет создана.

2. Управление моделями. Включает в себя несколько режимов управления (некоторые доступны только для моделей ERwin):

  - Создание модели.

Для создания новой модели необходимо нажать кнопку  или выбрать пункт меню NewModelMartDiagram. На экран будет выведено окно (рис. 3.3). В выпадающем списке надо выбрать библиотеку, в которой будет создаваться модель. После выбора библиотеки список ModelMart Library Object Set будет заполнен списком объектов, которые ModelMart хранит не в модели, а в библиотеке.

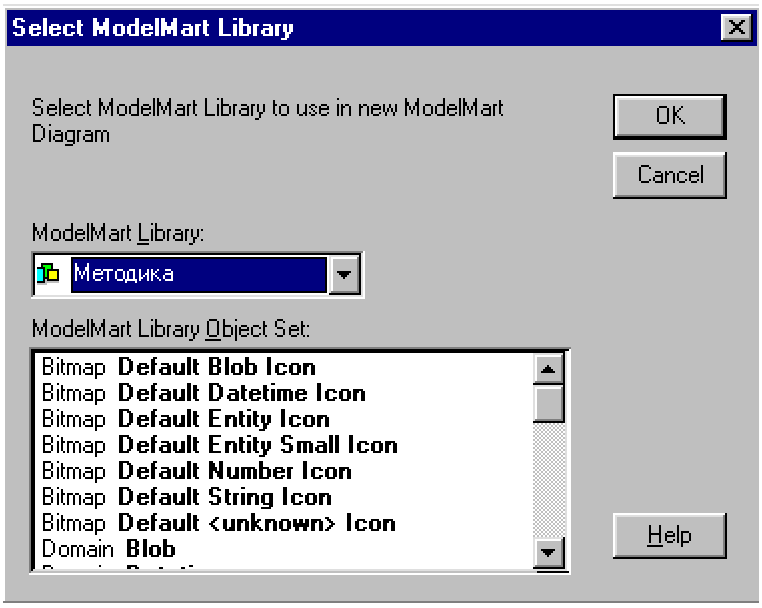


Рис. 3.3. Создание модели

При нажатии кнопки OK все эти объекты будут включены в новую модель. Если не требуется включать их в модель, нажимается кнопка Cancel.

➢ Загрузка модели. Допускается загрузка не всей модели, а только конкретной подмодели. При загрузке требуется определить параметр блокировки открываемой модели: Unlocked, Locked, Read-only. По умолчанию всегда предлагается режим Unlocked. Следует отметить, что при открытии подмодели в режиме Locked блокируется не только данная подмодель, но и вся модель, которой она принадлежит.

Чтобы открыть модель:

○ Для доступа к диалоговому окну Open ModelMart Model (Открыть модель ModelMart) выберите из меню ModelMart пункт Open (Открыть) или нажмите кнопку .
○ Выберите библиотеку, содержащую модель, которую Вы хотите открыть. Все модели из выбранной библиотеки теперь появятся в диалоговом окне ModelMart Model.
○ Выберите модель, которую Вы хотите открыть, и для ее открытия щелкните OK. До открытия модели у Вас есть возможность изменить параметры блокировки (Lock Options) (рис.3.4).

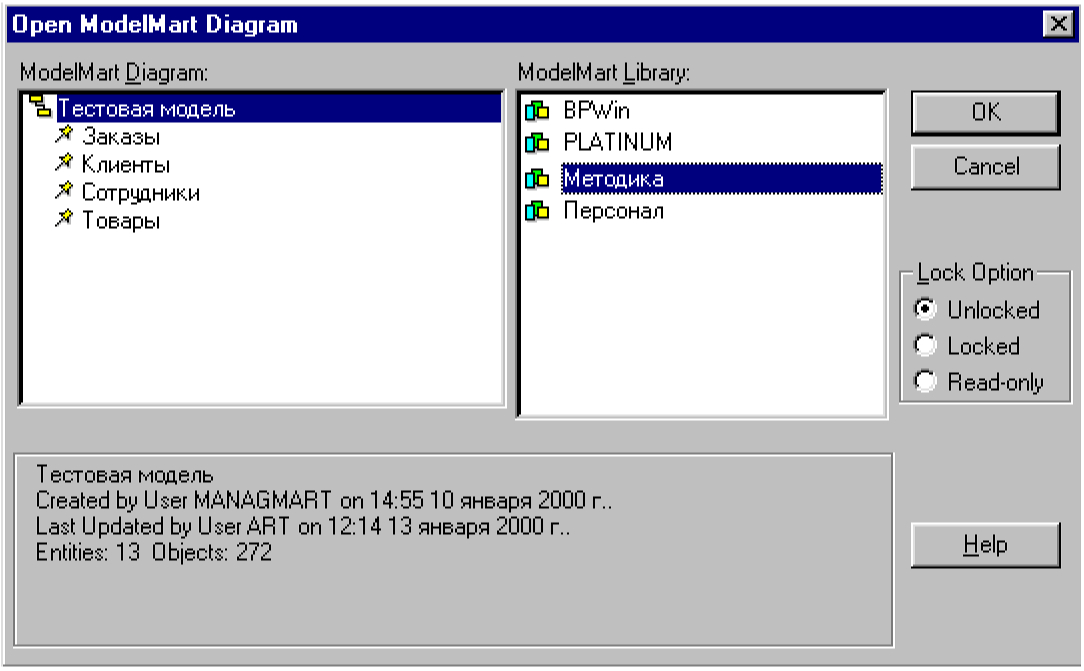


Рис.3.4. Открытие модели

Открытие модели в режиме ReadOnly означает, что измененную модель нельзя будет сохранить в репозитории. В режиме Locked модель блокируется, и другие пользователи не смогут изменить модель. В режиме Unlocked все пользователи могут открыть и изменить модель. Изменить уровень блокировки модели можно и в процессе работы. Для этих целей служит фиксируемая кнопка . Если кнопка нажата, значит модель находится в режиме Locked. Блокировка с модели снимается повторным нажатием кнопки. Причем сделать это может только пользователь, заблокировавший данную модель. В режиме Read Only нельзя установить блокировку модели (кнопка недоступна)

➢ Сохранение модели. При сохранении модели можно получить весь список изменений, которые будут сохраняться. Имеется возможность отменить сохранение некоторых изменений. При сохранении изменений, которые пользователь не имел право делать, выдается сообщение о нарушении прав доступа. При осуществлении попытки сохранения заблокированной модели выдается соответствующее сообщение. На момент сохранения модели на нее автоматически устанавливается статус Locked, позволяющий избежать одновременного сохранения модели несколькими пользователями. После сохранения статус Locked снимается.

ModelMart предоставляет следующие варианты сохранения:

Save (Сохранить) – Чтобы просто сохранить модель, щелкните на панели инструментов ModelMart  или выберите из меню ModelMart пункт Save (Сохранить). После этого откроется диалоговое окно Save Model to ModelMart (Сохранить модель в ModelMart) (рис.3.5):

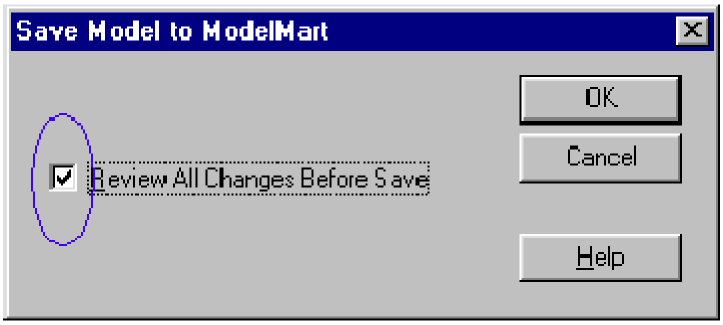
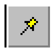


Рис.3.5. Сохранение модели

Снимите флажок Review All Changes Before Save (Просмотреть все изменения перед сохранением) только в том случае, если Вы не хотите просматривать изменения, которые могли вноситься в модель. Для сохранения модели щелкните OK.

Close (Закрыть) – При выборе из меню ModelMart пункта Close (Закрыть) появится диалоговое окно Close, которое предоставляет следующие варианты действий: сохранить модель в ModelMart, сохранить модель локально как файл ERwin или BPwin, либо закрыть модель без сохранения.

Save As (Сохранить как) – Если Вы хотите переименовать модель, используйте опцию Save As (Сохранить как) из панели инструментов ModelMart. С помощью этой опции можно также сохранить копию модели в другую библиотеку.

➢ Управление подмоделями (Subject Area Library). Дает возможность создавать, изменять и удалять подмодели, а также менять их состав. Представляет собой ограниченный по функциональности редактор моделей из ERwin (рис.3.6). Вызывается он нажатием кнопки  или через пункт меню ModelMartSubjectAreaManager.

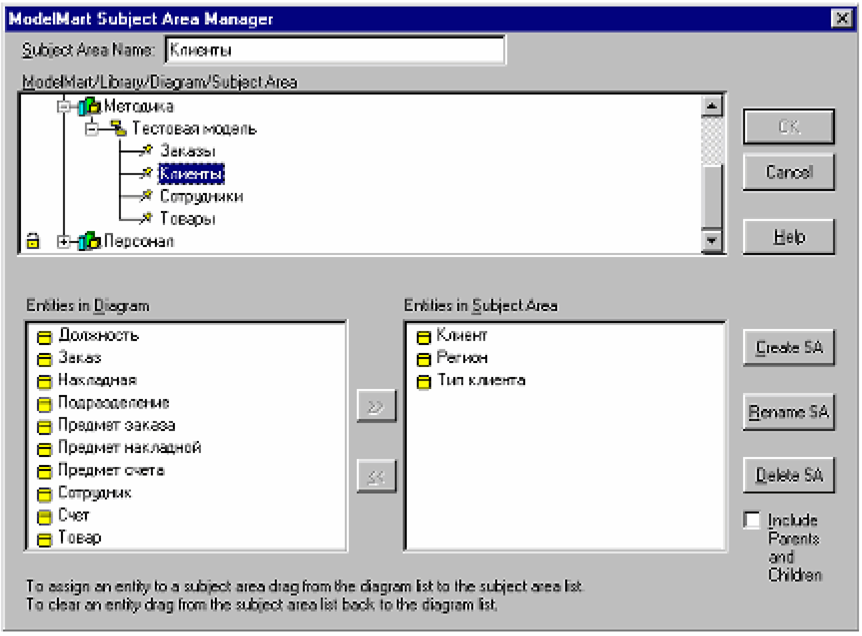


Рис.3.6. Редактор подмоделей

➢ Управление изменениями (Change Control Manager). Позволяет в процессе работы с моделью отменить некоторые изменения. В этом случае информация восстанавливается из репозитария. Для просмотра изменений нажмите кнопку  или выбрать опцию Review All Changes Before Save (Просмотреть все изменения перед сохранением). Появится диалоговое окно ModelMart Change Control Manager–Review Changes (Диспетчер контроля изменений ModelMart - просмотр изменений), которое отображает список изменений. Это диалоговое окно показывает те изменения, которые Вы внесли на своей рабочей станции (рис.3.7). Также, если Вы работали с незаблокированной моделью, диалоговое окно просмотра изменений может отображать те изменения, которые были внесены в модель ModelMart другим разработчиком уже после того, как Вы открыли модель из ModelMart или последний раз сохранили модель в ModelMart. Для этого нажмите .

Прямые изменения, перечисленные на приведенном далее снимке экрана, показывают, что Вы изменили название сущности CUSTOMER_2 на CUSTOMER_CREDIT, а CUSTOMER_1 на CUSTOMER_INFO.

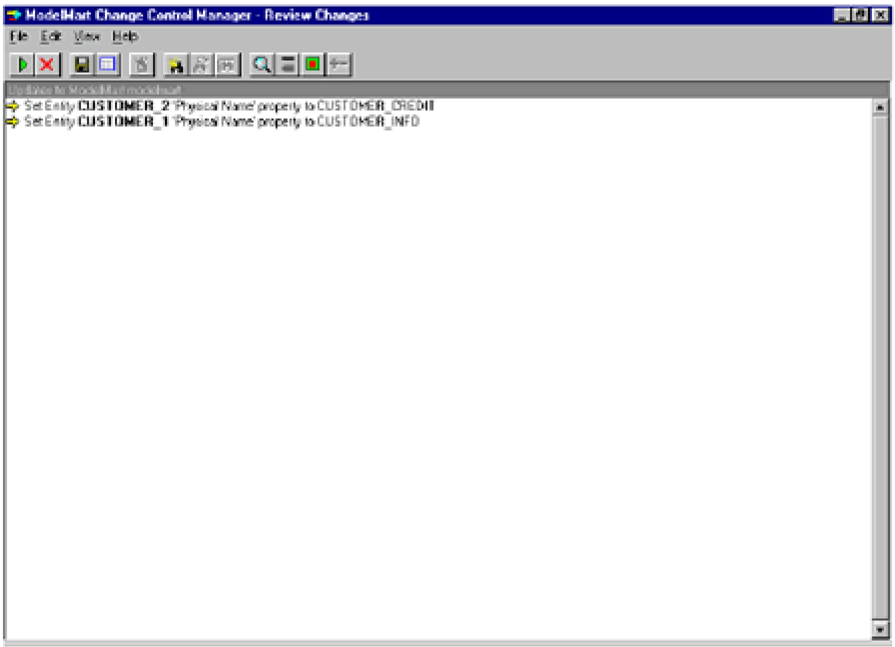
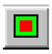


Рис.3.7. Диалог ModelMart Change Control Manager–Review Changes

По умолчанию это диалоговое окно не показывает графические изменения и изменения на уровне подробностей. Они представляют собой косвенные изменения, которые ModelMart автоматически реализует как результат внесенных прямых изменений. Однако, если Вы щелкните на кнопке инструментального средства  - Show Graphical Changes (Показать графические изменения), то диалоговое окно Review Changes (Просмотр изменений) дополнительно покажет следующую информацию (рис.3.8):

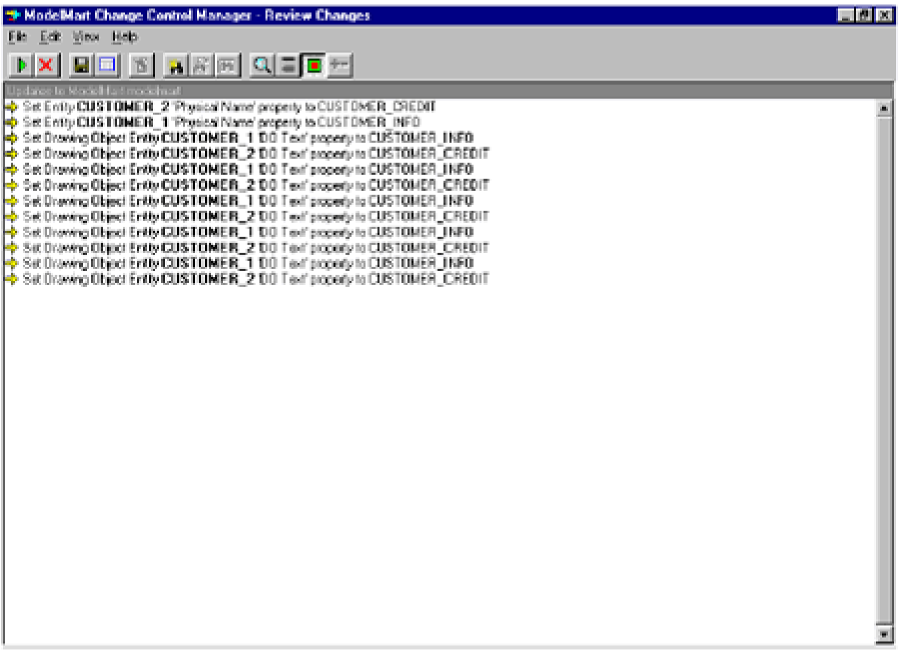


Рис.3.8. Просмотр прямых и графических изменений

Инструмент Graphical Changes показывает или скрывает графические изменения. Это изменения во внешнем виде модели, такие как изменение положения сущности, установление линии отношений или изменение названия сущности.

Если Вы решили отказаться от изменений, то выберите прямое изменение и щелкните кнопку **Toggle** (Переключить). Перед изменением, на котором находилась стрелка, появится значок **X**, а текст станет красного цвета. Это показывает, что это изменение **не будет сохранено.**

Следующий экран показывает, что изменение названия сущности с CUSTOMER_2 на CUSTOMER_CREDIT было отменено (рис.3.9).

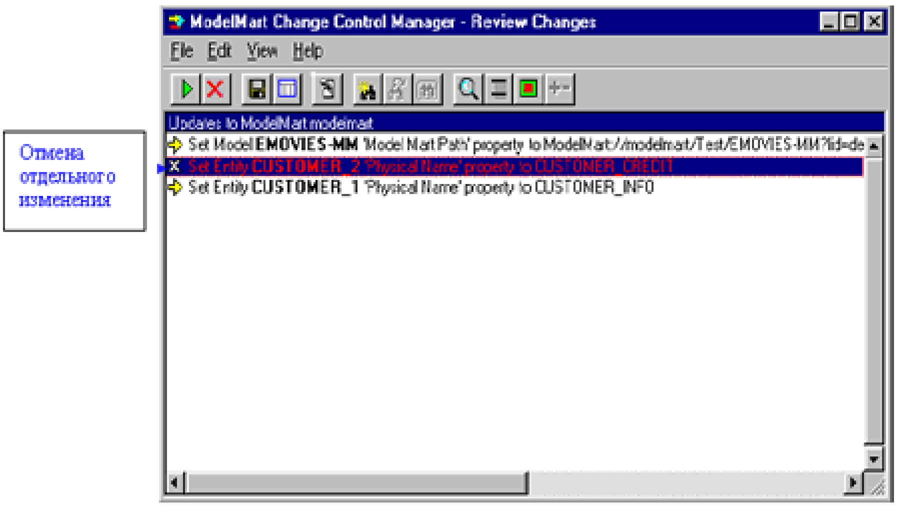


Рис.3.9. Отмена изменений

Для принятия всех изменений, которые появляются в диалоговом окне Review Changes, исключая все отмеченные как ненужные изменения, и сохранения модели обратно в ModelMart, щелкните на панели инструментов ModelMart.

Если Вы хотите выйти из диалогового окна диспетчера изменений (Change Manager), не сохраняя никаких изменений, щелкните . Вы вернетесь к модели, с которой работали, а все сделанные в модели изменения будут по-прежнему отображаться на экране, даже если они и не были сохранены.

- Обновление изменений (Refresh Manager). Позволяет контролировать и подгружать в свою модель изменения, сохраненные другими пользователями после открытия пользователем модели.
- Объединение моделей (Merge Manager). Представляет возможность объединить две модели ERwin. Слияние моделей BPwin невозможно. В зависимости от настроек слияние может быть произведено в целевую либо в новую модель. Исходная модель может быть загружена из файла либо из репозитария ModelMart. Далее нажимается кнопка или выбирается пункт меню ModelMartMergeManager. На экране появляется диалог (рис. 3.10), в котором следует выбрать целевую модель. Источником целевой модели может быть только ModelMart. После нажатия кнопки Merge начнется процесс объединения моделей. На рис.3.11 показан пример слияния моделей.

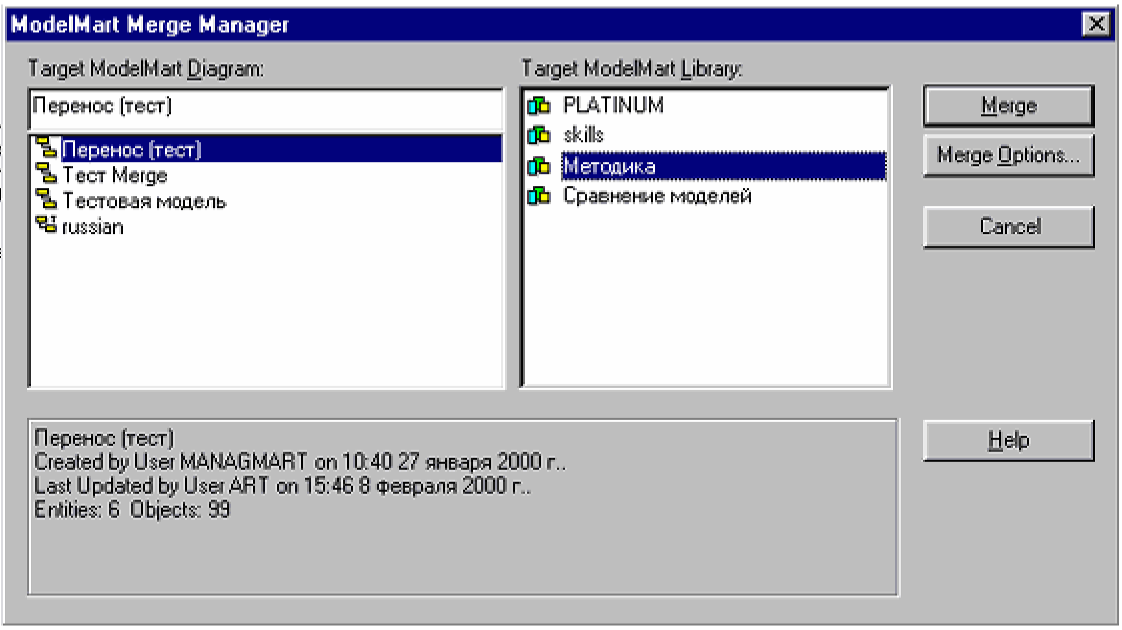


Рис.3.10. Диалог ModelMart Merge Manager

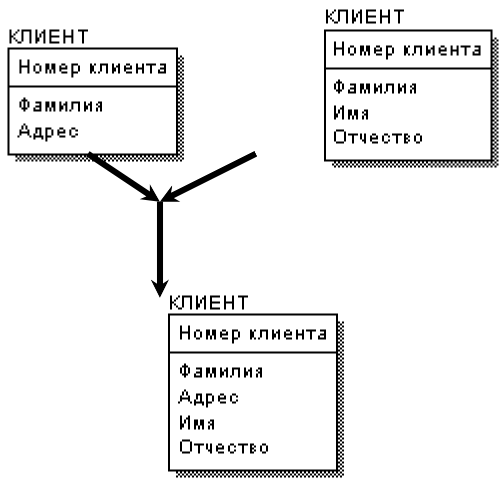


Рис.3.11. Пример слияния моделей данных в ModelMart

Кроме возможности задания размещения результата опции позволяют настроить параметры разрешения конфликтов объединения. Окно настройки опций представлено на рис. 3.12.

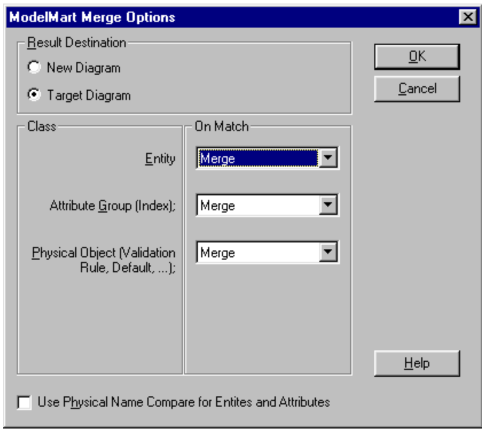


Рис.3.12. Окно настройки опций объединения

Принцип разрешения конфликтов заключается в устранении проблем существования объектов (сущностей, ключей, индексов и физических объектов) с одинаковыми именами. Существуют три варианта разрешения конфликта:

- Merge — создает только один объект;
- Do Not Merge — создает два объекта с одинаковыми именами, действует только для сущностей;
- Rename — создает два объекта с разными именами (FACE и FACE/2).

Рекомендации. Не следует использовать второй режим (Do Not Merge), поскольку при переходе на физическую модель это может привести к ошибкам при генерации структуры базы данных. Кроме того, наличие двух сущностей с одинаковым наименованием противоречит методологии IDEF1X.

- Управление версиями (Version Manager). ModelMart поддерживает возможность создания версий моделей:

    - автоматически создаваемые версии (Version) – полные копии моделей ERwin и BPwin, которые используются для отслеживания изменений в моделях при групповой работе и возможности отказа от изменений
    - отмеченные версии (MarkedVersion) – временные копии модели, создаваемые и именуемые пользователем вручную.

Версии принадлежат модели, имеют статус «только для чтения» и не могут быть изменены. Если требуется создать на основе версии новую ветвь проектирования модели, версия должна быть сохранена как отдельная независимая модель. Кроме того, данный редактор позволяет производить сравнение версий и моделей, с возможностью восстановления в рабочей модели информации из версии.

Механизм создания версий показан на рис.3.13, где:

a. Пользователь создает модель и записывает ее в хранилище. Версий не создается.

b. Пользователь извлекает модель, редактирует ее и возвращает в хранилище. При этом автоматически в хранилище создается версия модели.

c. Пользователь создает в хранилище отмеченную версию на основе версии, созданной автоматически.

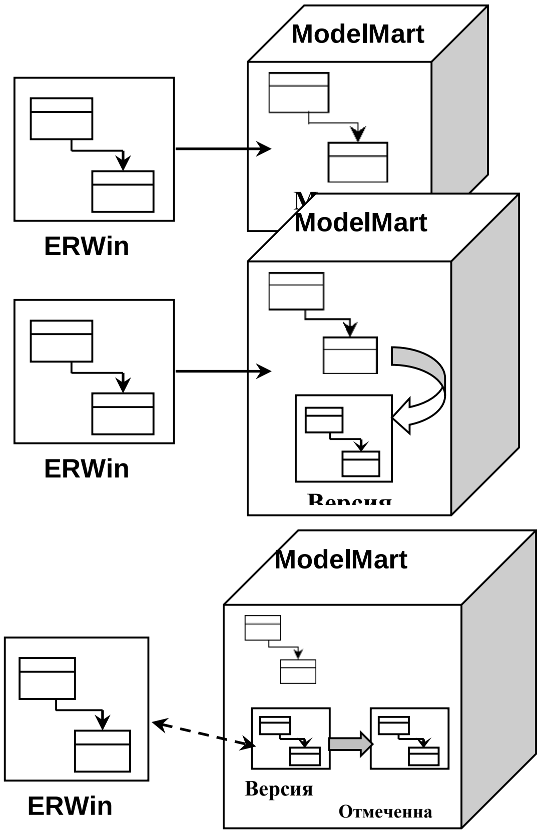


Рис.3.13. Механизм создания версий

Помимо версий существуют понятия архивов и «моментальных снимков». Их отличие от версий заключается только в принципе создания: архивы могут создаваться автоматически при сохранении измененной модели, если установлен соответствующий флаг на библиотеку. «Моментальные снимки» создаются при сохранении модели в файл или для сохранения изменений заблокированной (Locked) модели.

3. Управление сессиями (Session Manager). Дает возможность контролировать работу пользователей и отключить любого из активных пользователей от репозитария. Если отключаемый пользователь имел на этот момент заблокированную модель, блокировка снимается.
4. Управление правами доступа (Security Manager). Предназначен для создания пользователей и определения их права доступа (рис.3.14).

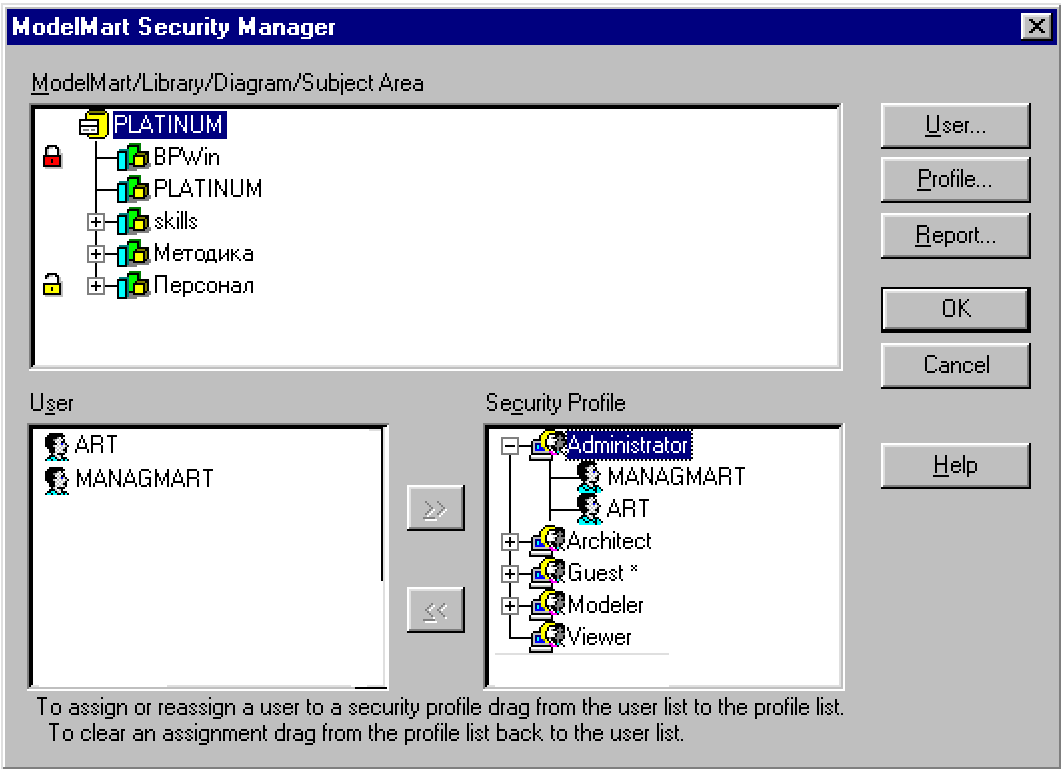


Рис.3.14. Окно ModelMartSecurityManager

Чтобы создать пользователя в ModelMart, он должен быть создан как пользователь базы данных, в которой сформирован репозитарий. Таким образом, первым уровнем доступа являются ввод имени пользователя и его пароль. Права доступа определяются через принадлежность пользователя определенной группе. Права группы могут быть заданы администратором. Смысл прав доступа заключается в разрешении или запрещении выполнения операций (создание, изменение, удаление) по работе с определенными объектами модели (рис.3.15). Ограничить доступ пользователя можно любым уровнем иерархии (подмодель, модель, библиотека, весь репозитарий). Помимо этого имеется возможность приписать пользователя к разным моделям с разными полномочиями.

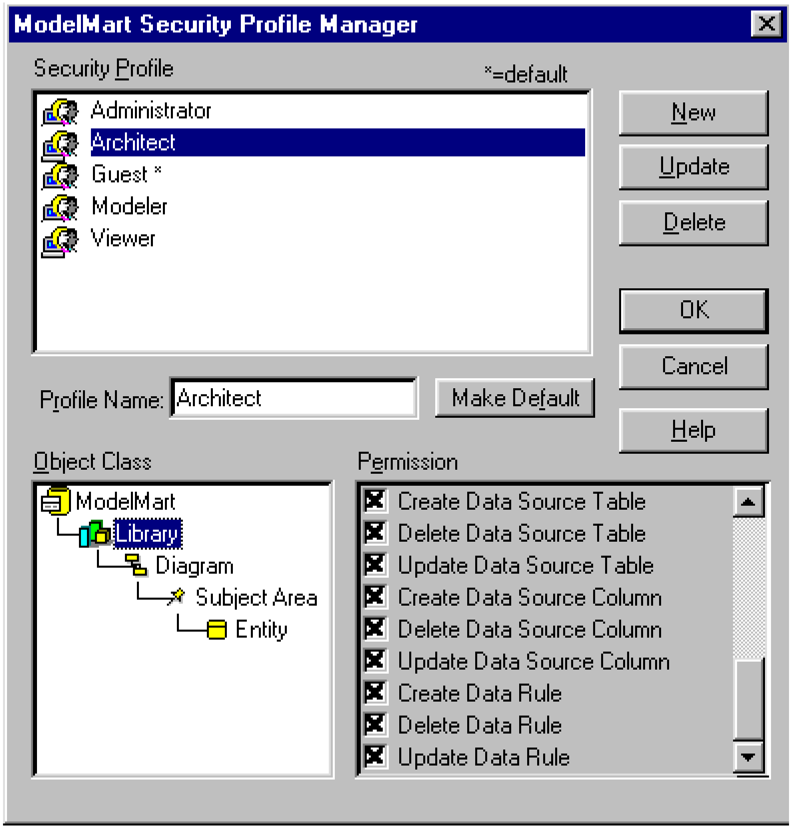


Рис.3.15. Определение прав доступа на объекты модели

4. Пример использования структурного подхода

Настоящий курс лабораторных работ ориентирован на изучение CASE-средств на примере диаграмм, создаваемых для проекта “Администрирование районов курсирования грузовых вагонов”. Процесс создания диаграмм начинается с этапа изучения предметной области.

4.1. Функции диспетчера районов курсирования грузовых вагонов ЦСЖТ

Основные функции диспетчера – это деятельность, связанная с выдачей разрешений на курсирование грузовых вагонов, являющихся собственностью предприятий, организаций и физических лиц, по путям общего пользования в пределах стран СНГ и Балтии.

Автоматизированное рабочее место (АРМ) диспетчера создается с целью поддержки этой деятельности. Выдача разрешений осуществляется согласно принятому порядку установления районов курсирования грузовых районов в межгосударственном сообщении.

4.2. Порядок установления районов курсирования грузовых вагонов в межгосударственном сообщении

1) Собственник, которому принадлежат вагоны, отправляет на свою дорогу приписки заявку на расширение района курсирования, принадлежащих ему вагонов. Заявка содержит следующие показатели:
   - код дороги приписки;
   - наименование собственника;
   - род перевозимого груза;
   - требуемый код района курсирования;
   - список номеров вагонов.
2) В управлении дороги его заявку рассматривают и оформляют заявку на расширение района курсирования в ЦСЖТ.
3) При получении заявки в ЦСЖТ диспетчер районов курсирования должен:
   - Проверить ее корректность, т.е. проверить принадлежность номеров вагонов данному собственнику, технические характеристики вагонов, их соответствие роду перевозимого груза, а также признаки качества каждого вагона, определяющие возможность курсирования по путям общего пользования. В случае некорректной заявки диспетчер возвращает ее отправителю;
   - Составить телеграмму-заявку на согласование в адрес причастных железнодорожных администраций, в которой указать наименование

собственника, номера вагонов, род груза, район курсирования, дорогу приписки вагонов;

- Согласовать требуемый район курсирования с причастными железнодорожными администрациями. Для этого диспетчер направляет заявку на разрешение расширения района курсирования железнодорожным администрациям. В течение установленного срока диспетчер должен получить ответ от всех причастных железнодорожных администраций, который содержит либо разрешение, либо отказ данным вагонам курсировать в данном районе;
- Если от железнодорожных администраций пришел положительный ответ, диспетчер оформляет телеграмму-разрешение на расширение района курсирования в адрес дороги приписки данного собственника и телеграмму-сообщение о согласованных районах курсирования в адрес железнодорожных администраций;
- После утверждения начальником ЦСЖТ телеграммы отправить по указанным адресам;
- Как только телеграмме будет присвоен номер, можно формировать корректировочный файл, который направляется в информационно-технический центр (ИТЦ) Главного вычислительного центра (ГВЦ).

В учебном пособии рассмотрены этапы моделирования ИС "Администрирование районов курсирования грузовых вагонов":

- функциональное моделирование в стандартах DFD, IDEF0, IDEF3;
- информационное моделирование в стандарте IDEF1X;
- определены связи между моделями объектно-ориентированного и структурного подходами;
- взаимосвязи моделей DFD и ERD; ERD и UML.

Варианты заданий для самостоятельной работы приведены в ***Приложении 2.***

5. Лабораторная работа №1 “Построение диаграмм потоков данных (DFD) для проекта <<Администрирование районов курсирования грузовых вагонов>>”

5.1. Построение DFD-модели

Запустите BPwin. Выберите в главном меню File→New. Введите имя модели (например, ARM) и тип модели – DFD (рис.5.1). Нажмите OK.

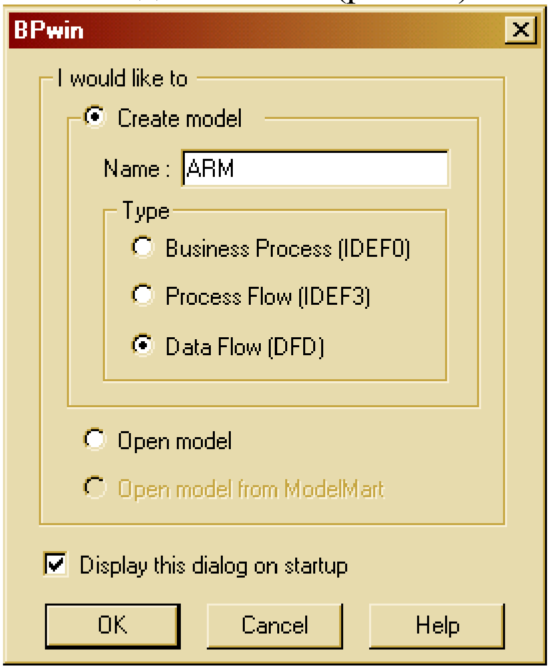


Рис.5.1. Диалог создания модели.

1. Настройка рабочего окна. В главном меню выберите View и проследите, чтобы все возможные подпункты были помечены галочкой (кроме ModelMartToolbar). В стандартной панели инструментов (StandardToolbar), которая находится под Главным меню, измените масштаб модели, чтобы область для рисования полностью отображалась (например, FullDiagram или FullSheet).

При возникновении проблемы с русскими символами обращайтесь к пункту меню Model → Default Fonts.

2. Описание диаграммы и модели в целом. Нажмите правой кнопкой мыши на свободном месте на диаграмме. В открывшемся меню выберите DiagramProperties. Укажите своё имя, статус диаграммы (пока рабочий – WORKING) и другую информацию.

Теперь ModelProperties. Выберите имя для вашего проекта (Project). Помимо этого необходимо дать краткое описание модели (Definition), указать цель построения диаграммы (Purpose), зафиксировать точку зрения (Viewpoint) – с точки зрения кого (пользователя, администратора и т.п.) создается модель.

Определение и формализация цели является крайне важным моментом. Фактически цель определяет соответствующие области в исследуемой системе, на которых необходимо фокусироваться в первую очередь. Например, если мы моделируем деятельность предприятия с целью построения в дальнейшем на базе этой модели информационной системы, то эта модель будет существенно отличаться от той, которую бы мы разрабатывали для того же самого предприятия, но уже с целью оптимизации логистических цепочек.

Четкое фиксирование точки зрения позволяет разгрузить модель, отказавшись от детализации и исследования отдельных элементов, не являющихся необходимыми, исходя из выбранной точки зрения на систему. Например, функциональные модели одного и того же предприятия с точек зрения главного технолога и финансового директора будут существенно различаться по направленности их детализации. Это связано с тем, что в конечном итоге, финансового директора не интересуют аспекты обработки сырья на производственных станках, а главному технологу ни к чему прорисованные схемы финансовых потоков. Правильный выбор точки зрения существенно сокращает временные затраты на построение конечной модели.

Также можно очертить область моделирования (Scope), которая в последующем будет определять общие направления движения и глубину детализации.

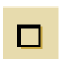
3. Определение контекстного процесса. Теперь нажмите правой кнопкой мыши на блоке в центре экрана, изображающем контекстный процесс. Выберите в появившемся меню Name… и введите “Работа диспетчера районов курсирования”. Внизу под диаграммой появился заголовок: TITLE: Работа диспетчера районов курсирования. Если имя процесса превышает размеры блока и выходит за его границы, то в поле Name после “Работа диспетчера” нажмите Enter.

Если хотите, то можете описать процесс (Definition) и дать дополнительные замечания (Note).

С помощью ColorEditor и FontEditor установите цвет фона блока контекстного процесса (например, голубой), цвет текста и шрифт для его имени.

Используя CostsEditor можно задавать стоимость реализации процесса (Cost), число повторений (Frequency) и длительность процесса (Duration).

4. Внешние сущности. Известно, что в процессе работы диспетчера районов курсирования он взаимодействует с ИТЦ (ГВЦ), железнодорожными администрациями и дорогами приписки собственников.Эти объекты на диаграмме будут отображены в виде внешних сущностей.

Выберем в BPwinToolbox кнопку  и разместим внешние сущности на диаграмме. Самостоятельно дайте имена и описания (по желанию) для этих объектов.

5. Определение информационных потоков. Каждому потоку можно давать имя непосредственно с помощью индивидуального NameEditor, который можно вызвать, наведя курсор на поток и нажав правую кнопку мыши.

Возможен и другой путь. Выберем в Главном меню Dictionary→Arrow… В столбце Name введем “Телеграмма-разрешение на расширение района курсирования” и нажмем Enter. Последовательно внесем в словарь:

- Заявка на расширение района курсирования
- Некорректная заявка
- Корректировочный файл
- Заявка на разрешение расширения района курсирования
- Разрешение на расширение района курсирования
- Телеграмма-сообщение о согласованных районах курсирования

Закончив формирование словаря, сохраните его (Dictionary→Save) и нажмите Dictionary→Close.

В BPwinToolbox выберем . Соединим внешнюю сущность “Дорога приписки собственника” с центральным блоком (Работа диспетчера районов курсирования. С помощью правой кнопки мыши вызовем NameEditor и в ArrowDictionary выберем “Заявка на расширение района курсирования”. Для наглядности можно подвести от названия к стрелке ссылку (в меню – Squiggle). Воспользуемся  и покажем точку на стрелке и точку на имени стрелки, которые мы хотим связать. Этого же можно добиться, вызвав правой кнопкой мыши Squiggle. Если название потока, по вашему мнению, неудачно расположено на экране, его можно передвинуть и изменить размеры. Для этого выделите заголовок и растягивайте (сжимайте) и/или перемещайте его подобно обычному окну Windows.

Для информационного потока можно изменить шрифт, стиль и цвет, наведя курсор на поток, нажав правую клавишу мыши и вызвав соответственно FontEditor, StyleEditor и ColorEditor.

Нарисуйте остальные потоки самостоятельно так, как показано на рис.4. Контекстная диаграмма готова (рис.5.2).

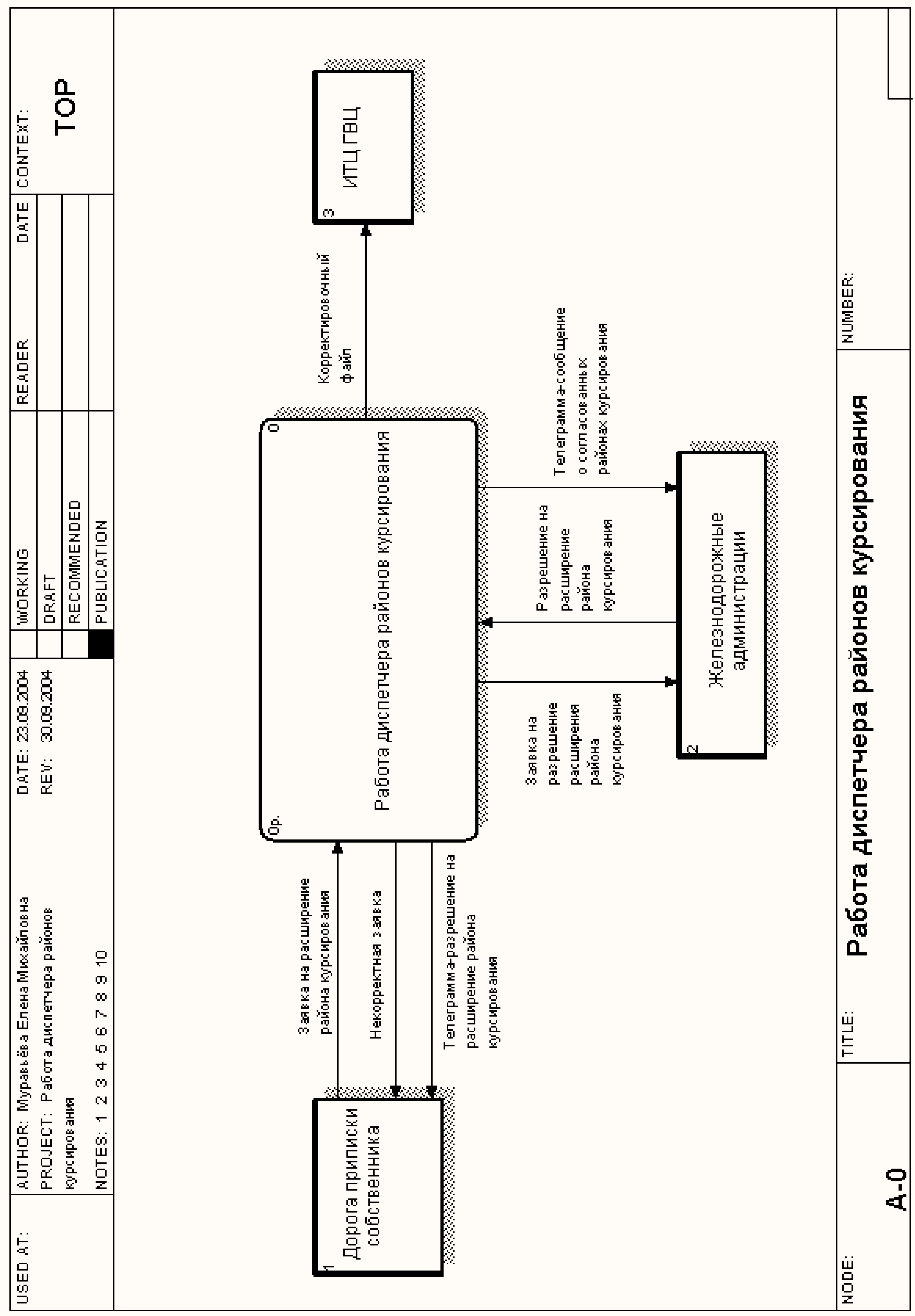


Рис.5.2. Контекстная диаграмма

6. Детализация контекстной диаграммы. В BPwinToolbox нажмем . Откроется окно следующего вида (рис.5.3):

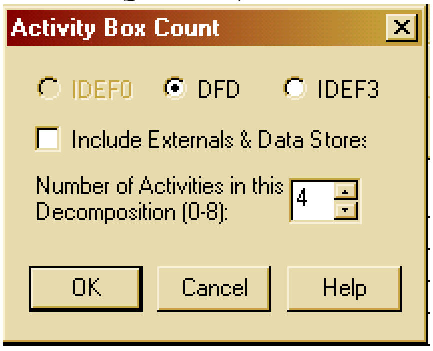
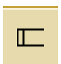


Рис.5.3. Окно декомпозиции диаграммы.

На дочерней диаграмме можно автоматически разместить от 0 до 8 подпроцессов (по умолчанию – 4). При выполнении работы переносить внешние сущности и хранилища родительской диаграммы на дочернюю диаграмму не рекомендуется. При желании это можно сделать, пометив галочкой пункт IncludeExternals&DataStores. Но в этом случае вы должны будете самостоятельно разместить на дочерней диаграмме блоки, соответствующие подпроцессам. Поэтому просто нажмите OK.

Диаграмма второго уровня содержит все потоки, которые ей достались в наследство от контекстной диаграммы. Помимо этого на экране вы видите четыре пустых блока, которые обозначают дочерние процессы. Имена процессов должны быть именованы отглагольными существительными, обозначающими действие. Присвойте им с помощью NameEditor следующие названия:

- Проверка корректности заявки
- Составление телеграммы-заявки на согласование
- Согласование с ж./д. администрациями
- Формирование корректировочного файла.

Теперь необходимо разместить на диаграмме информационные хранилища (DataStore), которых в модели будет девять. Для размещения хранилищ воспользуйтесь .

Дадим имена хранилищам:

- База данных отпущенных вагонов (БДОН)
- База данных технических характеристик (БДТХ)
- Дорожная картотека собственных вагонов (БДДКСВ)
- База данных районов курсирования (БДРК)
- БД заявок с дороги приписки
- БД телеграмм-заявок на согласование
- БД справочников
- БД собственников

- БД расширенных районов курсирования.

7. Привязка унаследованных информационных потоков к объектам диаграммы.

С помощью указателя  из BPwinToolbox выделим на дочерней диаграмме стрелку “Заявка на расширение района курсирования”, но не целиком, а только самую верхнюю часть (возможно для этого придется сдвинуть название стрелки) и подсоединим ее слева к первому процессу – “Проверка корректности заявки” (рис.5.4).

Рис.5.4.Связь унаследованных потоков и процесса.

В BPwin есть понятие ***Tunnel (туннель)***. Говорят, что поток проходит через туннель, если он есть на более подробной дочерней диаграмме, но отсутствует на родительской (чтобы не “перегружать” ее). Туннель в BPwin обозначается круглыми скобками в начальной или конечной точке потока. Обозначение “туннеля” (Arrow Tunnel) вокруг начала потока обозначает, что он не был унаследован от функционального родительского блока и появился (из “туннеля”) только на этой диаграмме. В свою очередь, такое же обозначение вокруг конца стрелки в непосредственной близи от блока – приёмника означает тот факт, что в дочерней по отношению к этому блоку диаграмме этот поток отображаться и рассматриваться не будет. Если вы видите на диаграмме не круглые, а квадратные скобки, это значит, что нарушена целостность диаграммы – поток на родительской диаграмме не совпадает с тем же потоком на дочерней диаграмме или отсутствует на ней. Это происходит, когда вместо присоединения унаследованных потоков к объектам диаграммы пользователь удаляет эти потоки и наносит новые, пусть даже с теми же именами.

Замечание. Возникают проблемы с привязкой унаследованных потоков, которые находятся в нижней части дочерней диаграммы и направлены тоже вниз. Постарайтесь избежать таких ситуаций. Но если такая ситуация имеет место, то выделите этот поток и удалите его. Теперь вернитесь к контекстной диаграмме. Вы увидите, что верхняя часть

удаленной стрелки заключена в квадратные скобки. Это сигнал вам о том, что вы не перенесли этот поток на дочернюю диаграмму. Выделите часть стрелки в скобках и нажмите правую клавишу мыши. Выберите ArrowTunnel… Вам предлагается убрать скобки (ResolveBorderArrow) или заменить их на круглые скобки (ChangeToTunnel). В первом случае вы вновь получите эту стрелку на дочерней диаграмме, во втором вы явно указываете, что эта стрелка на дочерней диаграмме не нужна.

Разъединение и слияние потоков. Вся дуга или ее часть может выходить из одного или нескольких процессов и заканчиваться в одном или нескольких процессах.

Разветвление потока означает, что все содержимое потока или его часть может появиться в каждом ответвлении. Поток помечается до разветвления, чтобы дать название всему набору. Кроме того, каждая ветвь потока может быть помечена или не помечена в соответствии со следующими правилами:

- непомеченные ветви содержат все объекты, указанные в метке потока перед разветвлением;
- ветви, помеченные после точки разветвления, содержат все объекты или их часть, указанные в метке потока перед разветвлением.

Слияние потоков указывает, что содержимое каждой ветви идет на формирование метки для потока, являющегося результатом слияния исходных потоков. После слияния результирующий поток всегда помечается для указания нового набора объектов, возникшего после объединения. Кроме того, каждый поток перед слиянием может помечаться или не помечаться в соответствии со следующими правилами:

- непомеченные ветви содержат все объекты, указанные в общей метке после слияния;
- помеченные перед слиянием ветви содержат все или некоторые объекты из перечисленных в общей метке после слияния.

8. Расширение словаря потоков данных. Откроем в Главном меню Dictionary→Arrow…(словарь потоков данных). Внесем в него названия следующих информационных потоков:

- Данные заявки с дороги приписки
- Данные о признаке качества вагонов
- Данные о районах курсирования вагонов
- Данные о расширении
- Данные о собственнике
- Данные о технических характеристиках вагонов
- Данные об отпущенных номерах вагонов
- Данные по телеграмме-заявке на согласование
- Данные справочников
- Корректная заявка
- Согласованная заявка
- Телеграмма-заявка на согласование.

Теперь начертим все эти информационные потоки на диаграмме.

Диаграмма второго уровня построена (рис.5.5). Любой процесс этой диаграммы можно детализировать, указав  и требующий детализации процесс.

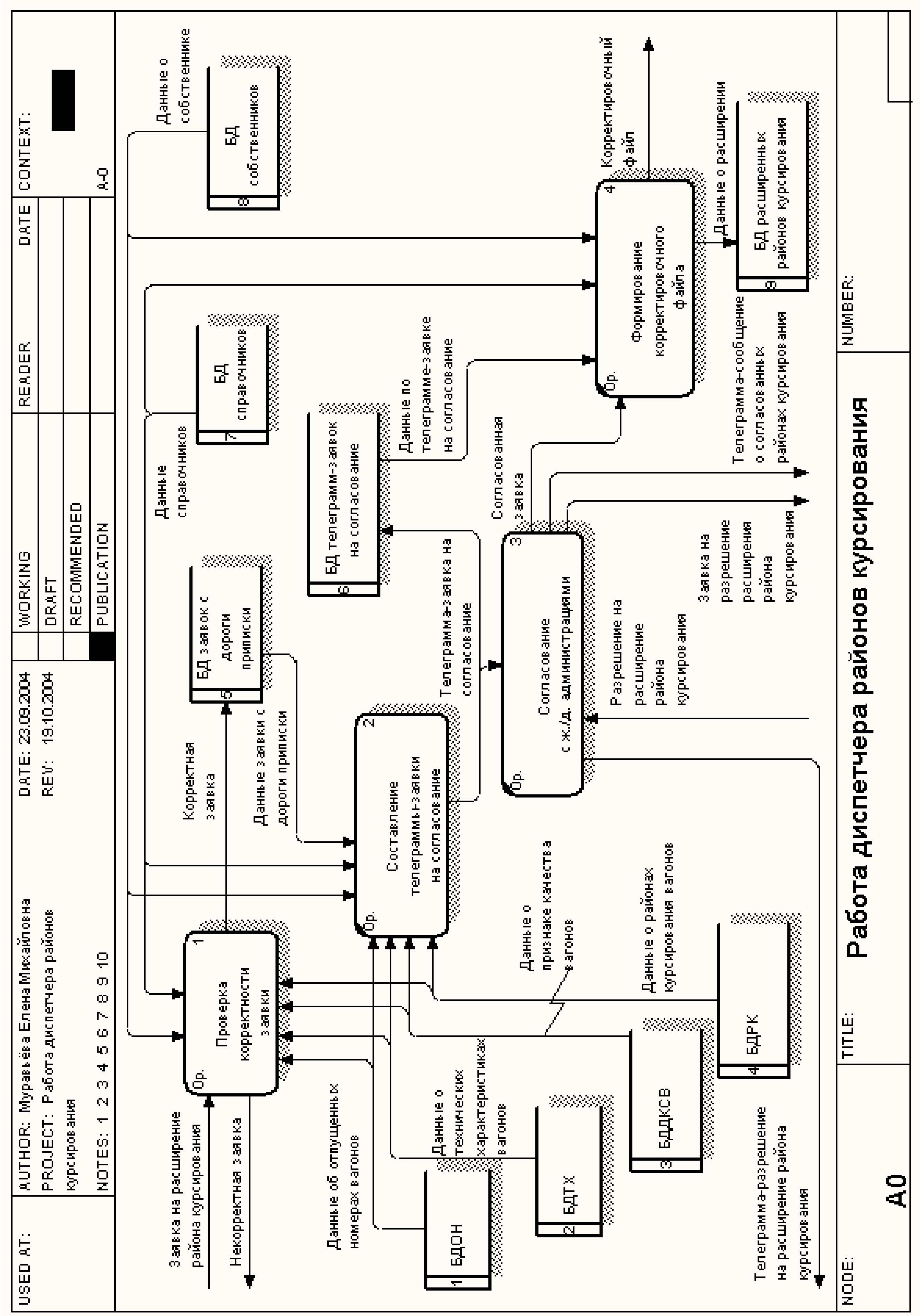


Рис.5.5. Диаграмма второго уровня.

9. Детализация диаграммы второго уровня.

Аналогично выше приведенному описанию декомпозируем процесс “Проверка корректности заявки”. При этом получаем три новых процесса. Опишем их в NameEditor как:

- Проверка принадлежности номеров вагонов данному собственнику
- Проверка технических характеристик вагонов
- Проверка признака качества вагонов.

Итоговая диаграмма третьего уровня представлена на рис.5.6.

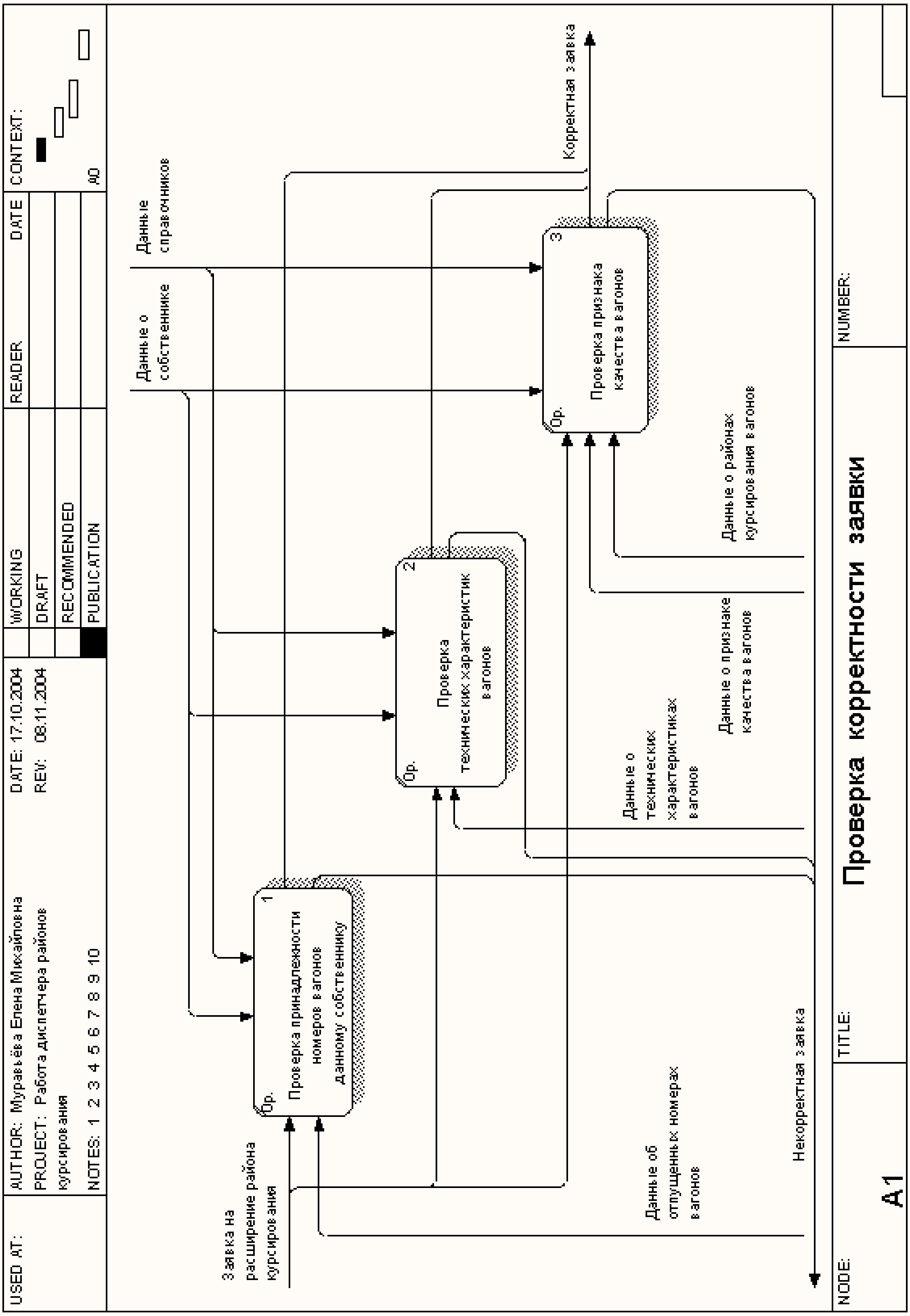


Рис.5.6. Диаграмма третьего уровня.

5.4. Создание отчетов по модели

BPwin позволяет создавать следующие типы отчетов:

- отчет по модели (ModelReport) – включает в себя всю информацию о модели, созданной в BPwin (IDEF0, IDEF3 или DFD);
- отчет о диаграмме (DiagramReport) – включает в себя информацию обо всех объектах, входящих в активную диаграмму BPwin;
- отчет об объектах диаграммы (DiagramObjectReport) – содержит полный список объектов, таких, как работы, хранилища, внешние сущности, с указанием их свойств;
- отчет о стоимостях работ (ActivityCostReport) – содержит данные о стоимостях работ и стоимостных центрах модели;
- отчет о стрелках (ArrowReport) – включает в себя информацию о стрелках и связях модели;
- отчет об использовании данных (DataUsageReport) – содержит информацию о таблицах БД, сущностях и атрибутах, сопоставленных с работами модели, а также действия, которые могут быть произведены над ними;
- отчет о целостности модели (ModelConsistencyReport) – показывает насколько IDEF0-модель соответствует выбранной методологии.

Вышеперечисленные отчеты являются стандартными и вызываются выбором соответствующего подпункта из меню Tools→Reports…. При этом открывается диалоговое окно для задания параметров формируемого отчета. Каждый полученный отчет может быть открыт в режиме просмотра (Preview), распечатан (Print) или сохранен в файл (Report).

Пример стандартных отчетов был представлен в пункте 5.2 (ArrowReport) и в пункте 5.3 (DiagramObjectReport).

В BPwin существует возможность формирования комплексных отчетов. Выбрав Tools→ReportBuilder…, откроется диалог ReportTemplates (рис.5.7), в котором можно:

- создать новый шаблон отчета (New…);
- выбрать за основу один из уже вами созданных отчетов (Edit…);
- удалить созданный отчет (Remove…);
- просмотреть созданный отчет (Run);
- выбрать тип файла (*.rtf, *.html, *.txt), в который будет экспортирован отчет;
- изменить директорию, где будет сохранен отчет (Browse…).

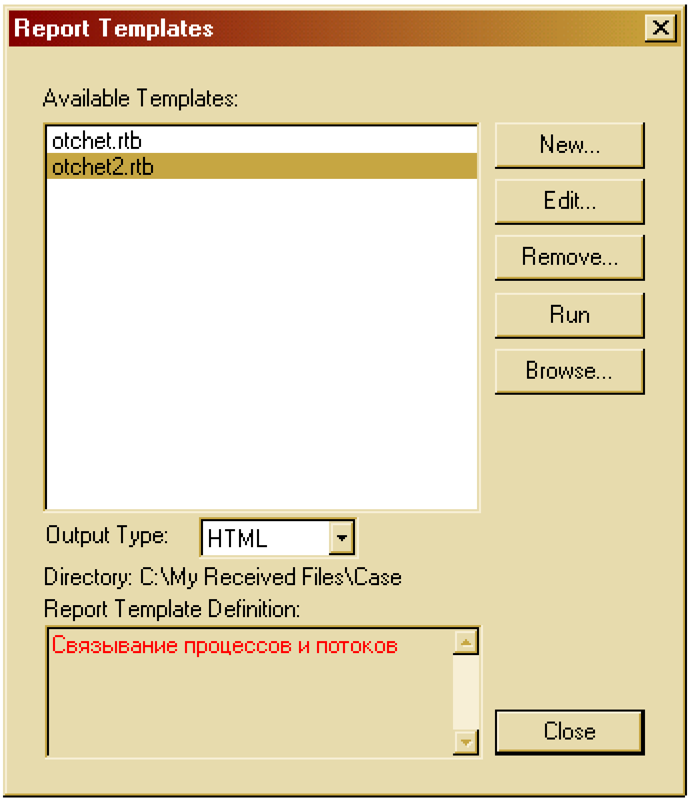


Рис.5.7. Диалог создания отчета.

Далее при нажатии кнопки New… или Edit… вызывается диалог задания параметров отчета (рис.5.8). В левой части окна содержится список возможных секций отчета, соответствующих типам объектов модели, в правой – список секций, включенных в отчет. Для создания новой секции отчета необходимо выбрать тип объекта модели и щелкнуть по кнопке ▶. По умолчанию в отчет включается только имя объекта. Для включения других свойств необходимо с помощью меню Edit/Properties или соответствующей кнопки на панели инструментов P вызвать диалог Properties.

Рассмотрим создание отчета “Связывание процессов и потоков”. Для получения отчета необходим объект Activity. Переносим его в структуру. Правой кнопкой мышки кликаем на появившееся поле ActivitySection и выбираем поля, которые хотим видеть в отчете. В нашем случае структура отчета выглядит следующим образом:

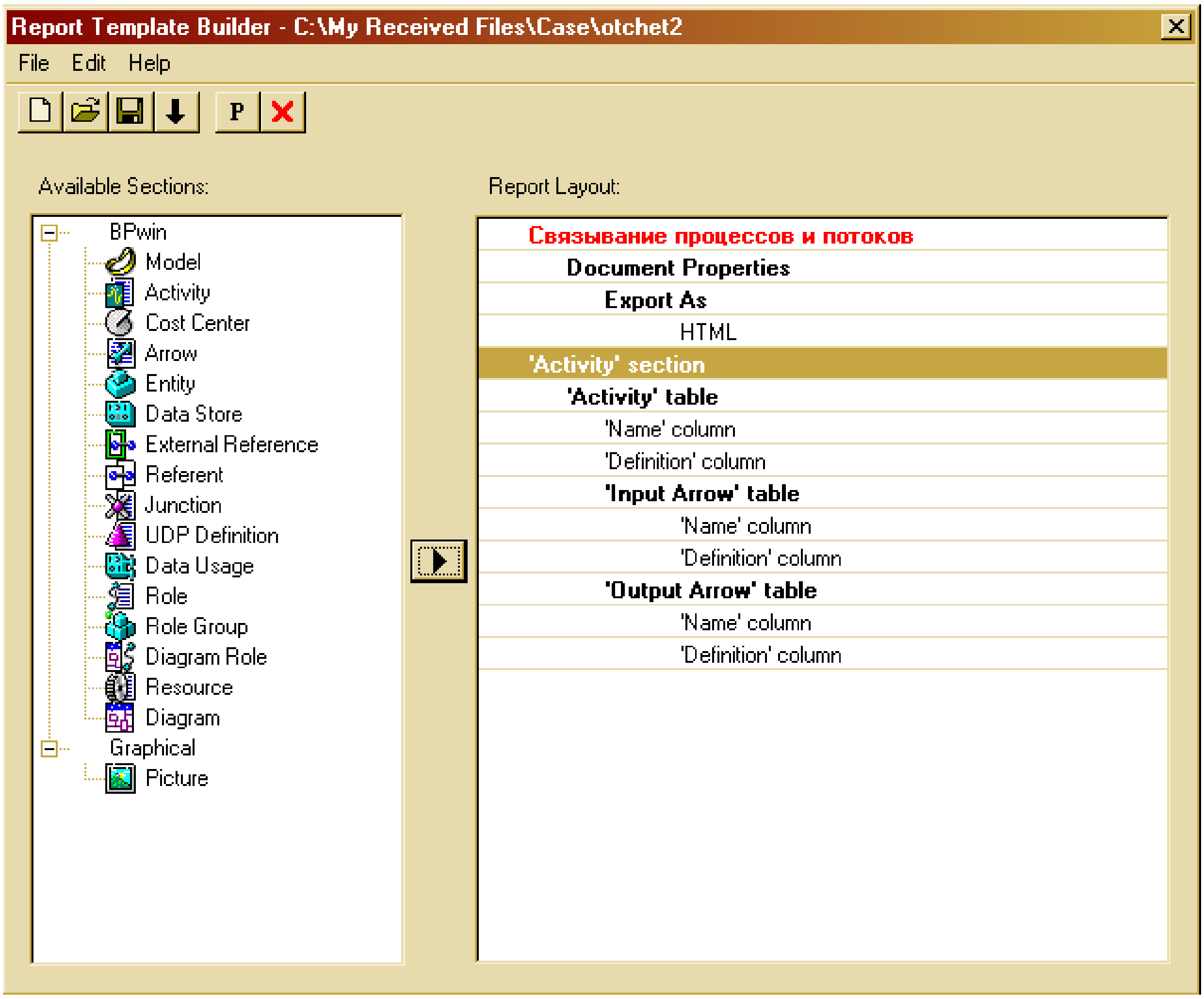


Рис.5.8. Диалог создания параметров отчета

Нажимаем на кнопку  (File→Run) и получаем отчет (пример отчета см. в ***Приложении 1***).

5.5. Контрольные вопросы

1. Что описывает диаграмма DFD?
2. Какая нотация используется в BPwin для построения диаграмм DFD?
3. Перечислите составные части диаграммы DFD.
4. В чем состоит назначение процесса?
5. Что называется внешней сущностью?
6. Что описывают хранилища?
7. Объясните принцип именования разветвляющихся и сливающихся стрелок.
8. Как разрешить туннелирование стрелки?
9. Какие виды стандартных отчетов существуют в BPwin?
10. В какие форматы можно экспортировать отчеты?

6. Лабораторная работа №2 “Построение IDEF0-модели для проекта <<Администрирование районов курсирования грузовых вагонов>> и ее дополнение IDEF3-моделью”

Построение модели системы должно начинаться с изучения всех документов, описывающих ее функциональные возможности (например, технического задания).

После изучения исходных документов и опроса заказчиков и пользователей системы необходимо сформулировать цель моделирования и определить точку зрения на модель. Рассмотрим технологию ее построения в рамках работ по созданию автоматизированного рабочего места (АРМ) диспетчера районов курсирования.

6.1. Построение IDEF0-модели

Создайте в BPwin новую модель, выбрав методологию IDEF0, сформулируйте цель моделирования и определите точку зрения на модель.

На рис.6.1 приведена контекстная диаграмма диспетчера районов курсирования. Диаграмма содержит один процесс – “Работа диспетчера районов курсирования”. Стрелки, входящие слева в блок, указывают на входы операции (заявка на расширение района курсирования, исходная БД); стрелки справа, выходящие из работы, - это выходы операции (некорректная заявка, направляемая собственнику; измененная БД заявок, телеграмма-разрешение на расширение района курсирования, отправляемая в адрес дороги приписки собственника; телеграмма-сообщение о согласованных районах курсирования в адрес ж/д администраций; корректировочный файл, направляемый в ИТЦ ГВЦ); стрелки, входящие в работу сверху, указывают на необходимые для выполнения операции управляющие воздействия (утверждение текста телеграммы начальником ЦСЖТ, разрешения ж/д администраций и нормативные сведения); стрелка, входящая снизу, определяет исполнителя операции (диспетчера районов курсирования).

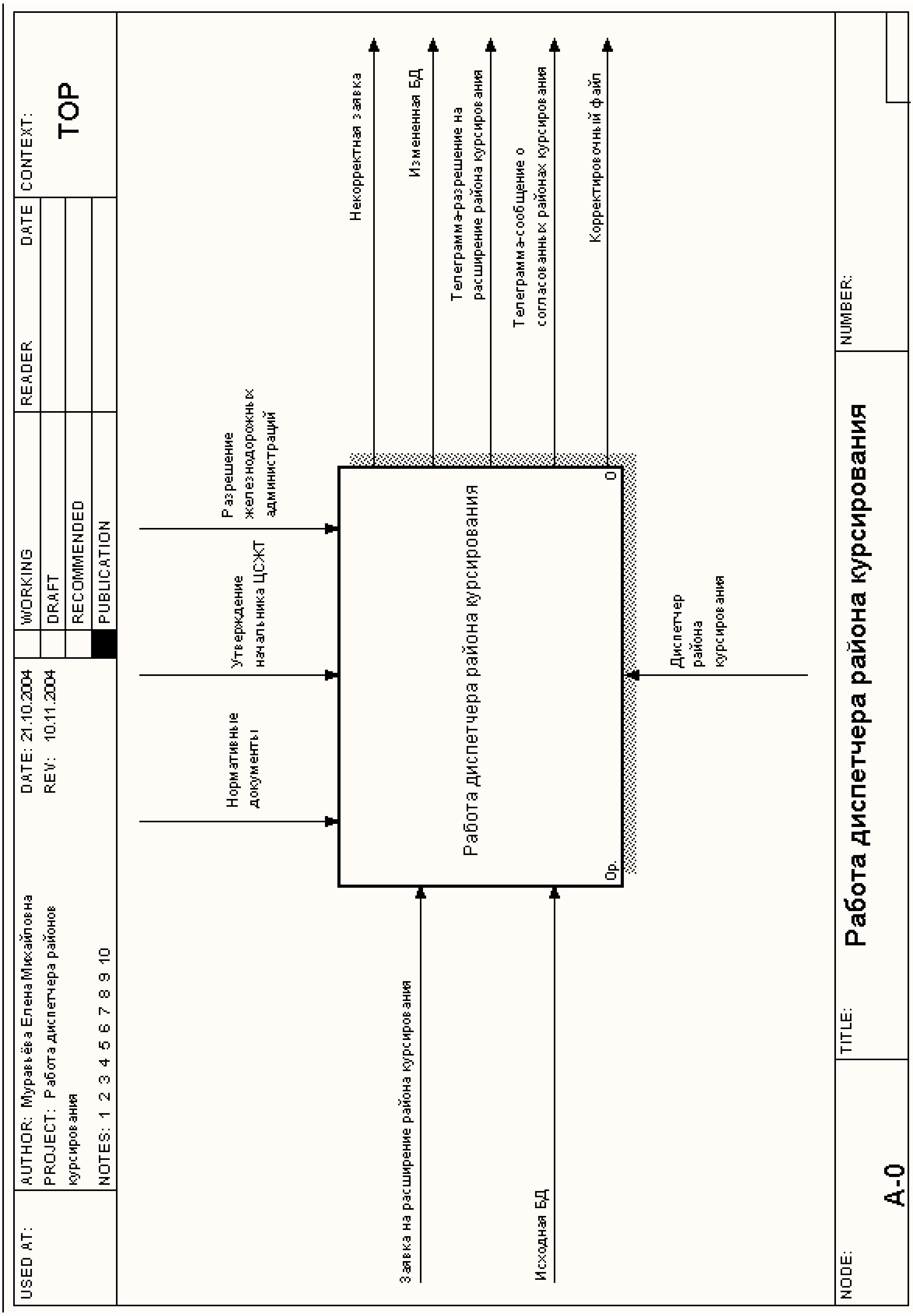


Рис.6.1. Контекстная диаграмма в стандарте IDEF0

Проведем декомпозицию контекстной диаграммы. Все потоки, которые были указаны на контекстной диаграмме, сохраняются. Контекстный процесс “Работа диспетчера районов курсирования” представляется четырьмя дочерними работами:

- Проверка корректности заявки
- Составление телеграммы-заявки на согласование
- Согласование с ж./д. администрациями
- Формирование корректировочного файла.

Работы – поименованные процессы, функции или задачи, которые происходят в течение определенного времени и имеют распознаваемые результаты. Имя работы должно быть выражено отглагольным существительным, обозначающим действие.

Стрелки представляют собой некую информацию и именуются существительными.

Блоки в IDEF0 размещаются по степени важности. Этот относительный порядок называется доминированием, которое понимается как влияние, которое один блок оказывает на другие блоки диаграммы. Наиболее доминирующий блок обычно располагается в верхнем левом углу диаграммы, а наименее доминирующий – в правом углу.

На рис.6.2 показана функциональная диаграмма второго уровня.

Каждый процесс этой диаграммы может быть детализирован в диаграммах следующих уровней.

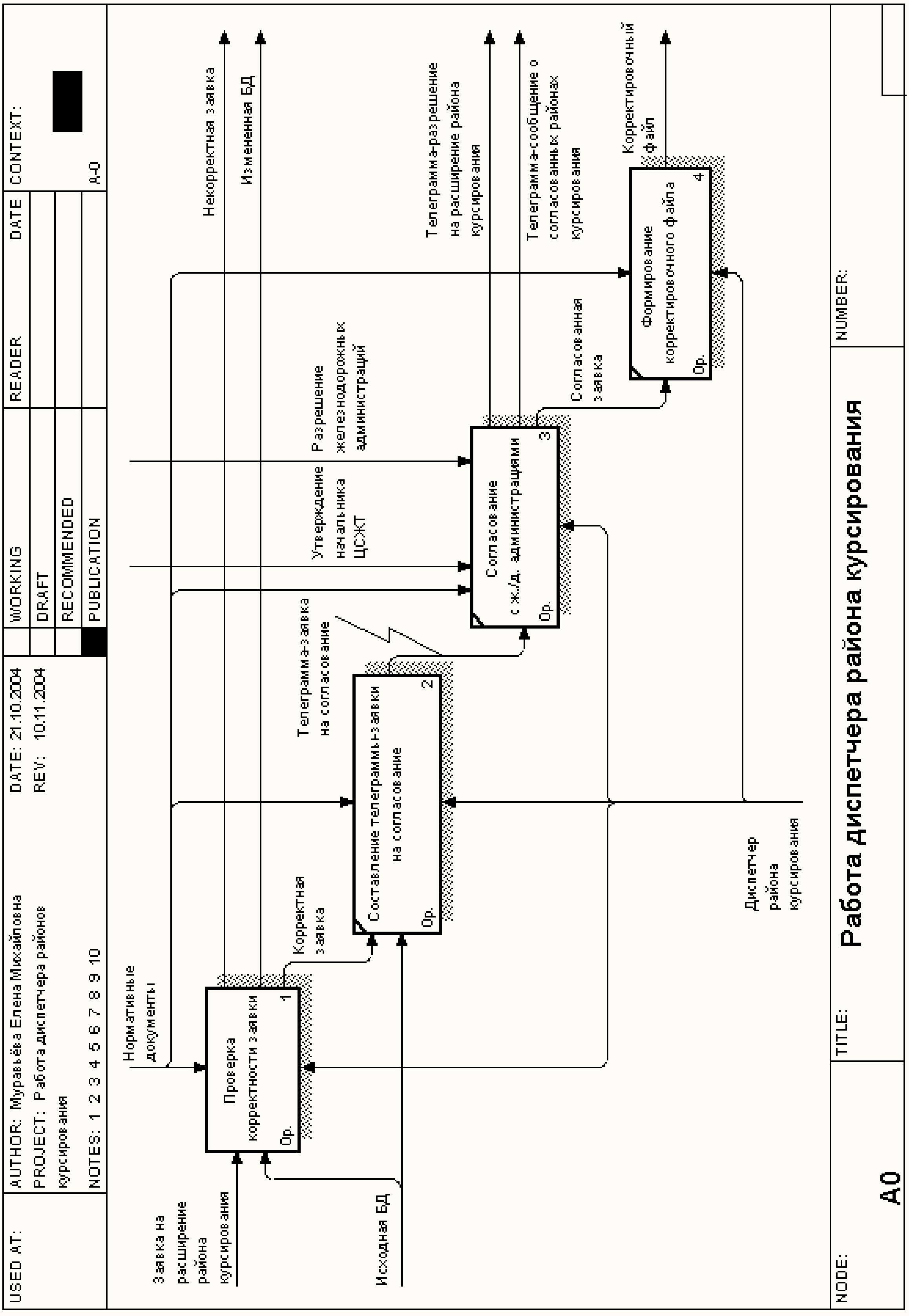


Рис.6.2. Декомпозиция работы “Работа диспетчера районов курсирования”

6.2. Построение IDEF3-модели

С помощью диаграмм IDEF3 обычно моделируют последовательности работ, имеющие технологические и временные связи, т.е. логику взаимодействия информационных потоков (“Заявка на расширение района курсирования” и “Корректная/ некорректная заявка”).

В данной лабораторной работе рассмотрим декомпозицию работы “Проверка корректности заявки” в стандарте IDEF3. Декомпозицию можно проводить как из DFD, так и из IDEF0-диаграммы.

Стрелки на диаграммах IDEF0 и DFD означают потоки информации или объектов, передаваемых от одной работы к другой. На диаграммах IDEF3 стрелки могут показывать только последовательность выполнения работ, т.е. имеют иной смысл, нежели стрелки IDEF0 или DFD. Поэтому при декомпозиции работы IDEF0 или DFD в IDEF3-диаграмму стрелки не мигрируют на нижний уровень. Если необходимо показать на дочерней диаграмме IDEF3 те же объекты, что и на родительских диаграммах IDEF0 или DFD, необходимо использовать объекты-ссылки.

Выделим работу “Проверка корректности заявки” для декомпозиции и нажмем ▼ в BPwinToolbox. Появится диалоговое окно, в котором предлагается выбрать тип модели и количество работ (процессов) (рис.6.3). Выберем тип модели – IDEF3, а количество работ – 4. Нажмите OK.

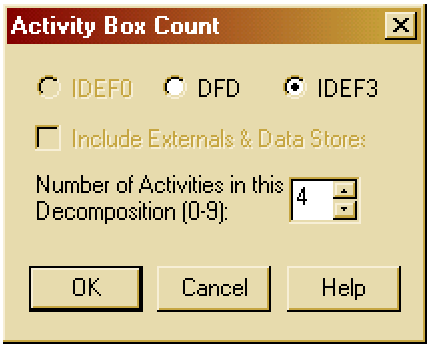


Рис.6.3. Окно декомпозиции диаграммы.

На экране вы видите четыре единицы работ.

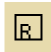
Согласно описанию системы признак корректной заявки формируется тогда, когда данные, содержащиеся в заявке, поступившей с дороги, соответствуют нормативам. Если хотя бы одно поле из заявки не соответствует нормативу, то формируется признак некорректной заявки.

Следовательно, присвоим единицам работ с помощью NameEditor следующие названия:

- Проверка принадлежности номеров вагонов данному собственнику
- Проверка технических характеристик вагонов
- Проверка признака качества вагонов

- Возврат некорректной заявки.

Теперь разместим два перекрестка типа Asynchronous “AND” и один - типа Asynchronous “OR”. Для этого воспользуйтесь .

В BPwin есть возможность указать визуально условие слияния или разветвления стрелок. Для этого используются объекты-ссылки типа ELAB. Для внесения объекта-ссылки на диаграмму служит кнопка .

Откроем словарь стрелок (Dictionary→Arrow…) и внесем в него последовательно:

- Номера вагонов принадлежат собственнику
- Номера вагонов не принадлежат собственнику
- Технические характеристики соответствуют нормативам
- Технические характеристики не соответствуют нормативам
- Признаки качества позволяют курсировать по путям общего пользования
- Признаки качества не позволяют курсировать по путям общего пользования

Начертим связи на диаграмме.

IDEF3-диаграмма отображена на рис.6.3.

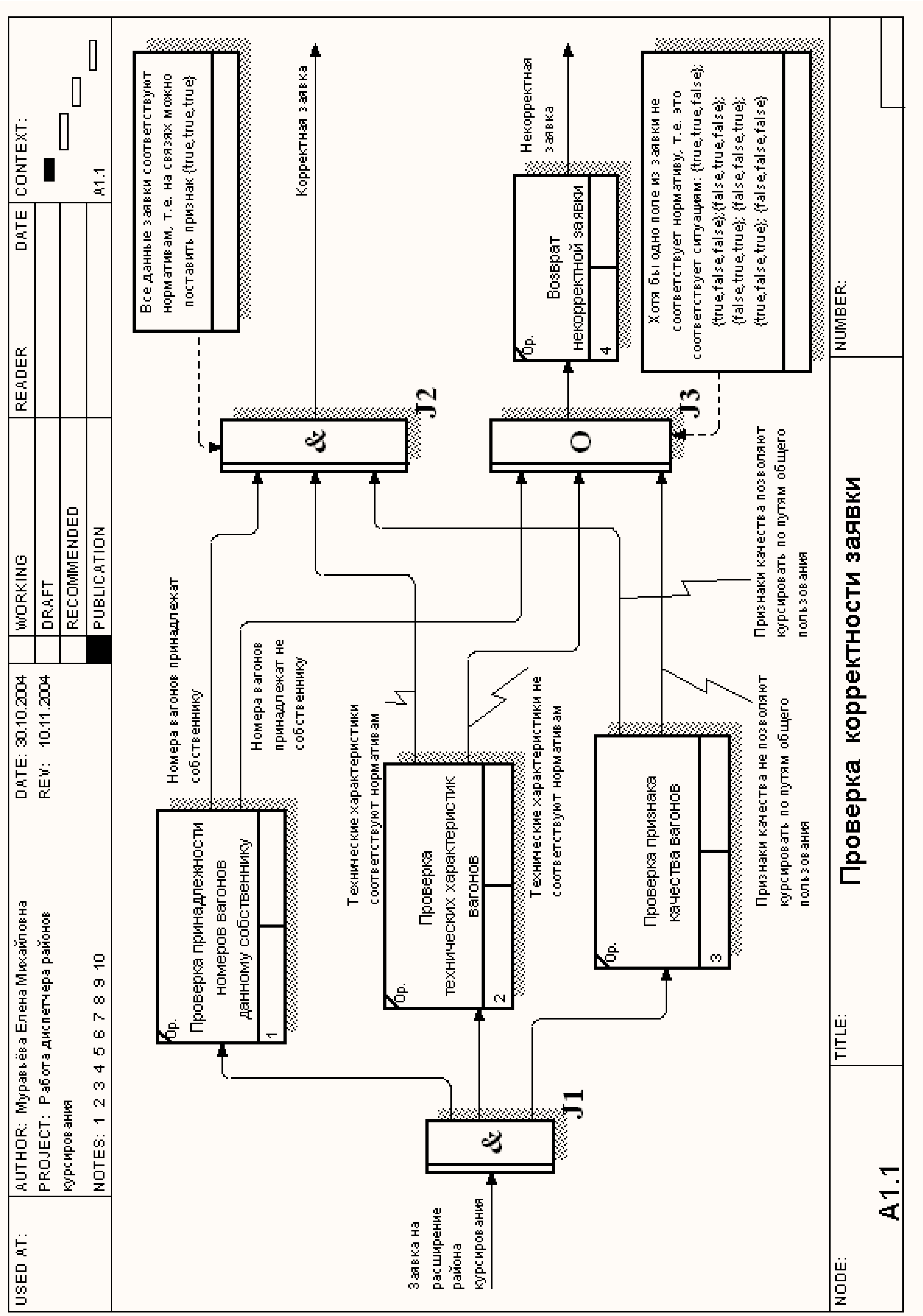


Рис.6.4. Декомпозиция работы "Проверка корректности заявки" в стандарте IDEF3

6.3. Контрольные вопросы

1. Что представляет собой модель в нотации IDEF0?
2. Что обозначают работы в IDEF0?
3. Назовите порядок наименования работ?
4. Какое количество работ должно присутствовать на одной диаграмме?
5. Что называется порядком доминирования?
6. Как располагаются работы по принципу доминирования?
7. Каково назначение сторон прямоугольников работ на диаграммах?
8. Перечислите типы стрелок.
9. Может ли модель BPwin содержать диаграммы нескольких методов?
10. Что описывает диаграмма IDEF3?
11. Перечислите основные элементы диаграмм IDEF3.
12. Что показывают связи в диаграммах IDEF3?
13. Перечислите типы стрелок в диаграммах IDEF3.
14. Что называется перекрестком?
15. Назовите типы перекрестков.
16. Что называется объектом-ссылкой?
17. Какие бывают типы объектов-ссылок?

Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы, как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета; - обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)

Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными

	буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Моделирование информационных систем и технологий»

Специальность 09.03.02 Информационные системы и технологии

Азов
202_

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- **ПК-1.1:** Осуществляет анализ требований к программному обеспечению
- **ПК-1.2:** Осуществляет разработку технических спецификаций на программные компоненты и их взаимодействие
- **ПК-1.3:** Проводит проектирование программного обеспечения

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Моделирование информационных систем и технологий» по специальности 09.03.02 «Информационные системы и технологии»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту,

ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Подготовка к лабораторным работам	24
Подготовка к лабораторным работам	18
Подготовка к лабораторным работам	18
Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к текущей аттестации	47,8
Подготовка к лабораторным работам	32
Подготовка к лабораторным работам	48
Подготовка к лабораторным работам	15,7
Подготовка к лабораторным работам	32
	235,5

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Объектно-ориентированное программирование»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202_

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

- **ПК-3.1:** Разрабатывает архитектуру и базы данных информационной системы;
- **ПК-3.2:** Осуществляет организационное и технологическое обеспечение кодирования на языках программирования;
- **ПК-3.3:** Выполняет оптимизацию работы информационной системы.

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Объектно-ориентированное программирование» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;

– наименования лекционных разделов курса;

– темы практических работ работ;

– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту,

ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Изучение способов составления программ с полиморфизмом. Изучение способов составления программ с инкапсуляцией методов и переменных. Изучение способов составления программ с различными вариантами наследования.	28
Перегрузка функций и конструкторов. Организация рекурсий в функциях. Файлы и работа с ними. Структуры, составление и использование структур. Многозадачное программирование	28
Изучение организации проектов, классов и структуры программы в Java. Изучение типов данных в Java. Изучение простых и управляющих операторов в Java. Оформление и работа с классами в Java при реализации элементов ООП	28
	84

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210x297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; *межсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Операционные системы»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202_

1. Общие положения

Цель методических рекомендаций - обеспечить студенту оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Задания для самостоятельной работы направлены на:

— систематизацию и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

— углубление и расширение теоретических знаний;

— развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, ответственности и организованности;

— развитие исследовательских умений;

— формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС ВО;

— формирование профессиональных компетенций:

— ОПК-2.1: Разработка и отладка программного кода на языках программирования;

- ОПК-2.2: Проводит техническую поддержку и сопровождение инфокуммуникационных систем и сетей
- ОПК-2.3: Осуществляет работы по созданию (модификации) и сопровождению информационных систем, автоматизирующих задачи организационного управления и бизнес-процессы
-
- ОПК-5.1: Инсталлирует и настраивает программное и аппаратное обеспечение для информационных и автоматизированных систем;
- ОПК-5.2: Администрирует информационные и автоматизированные системы;
- ОПК-2.4: Использует современные операционные системы для решения задач профессиональной деятельности.

Задания разработаны в соответствии с:

– Рабочей программой дисциплины «Операционные системы» по специальности 09.03.02 «Информационные системы»;

Методические указания по использованию электронной образовательной среды.

Все материалы для изучения дисциплины представлены на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: https://atidstu.ru/

Рекомендуется:

- Сначала ознакомиться с содержимым на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове (и всех вложенных папок).

- Ознакомиться с содержанием курса по рабочей программе дисциплины на сайте электронно-образовательной среды ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/

- Выписать (скачать) из соответствующей рабочей программы:

– список рекомендованной литературы;
– наименования лекционных разделов курса;
– темы практических работ работ;
– теоретические вопросы к экзамену.

Студентам **рекомендуется** в соответствии с расписанием лекций и практических занятий по данной дисциплине запланировать дни недели и часы для самостоятельной работы, которая будет включать в себя подготовку к лекциям, лабораторным занятиям, а также подготовку к промежуточному (рейтинговому) контролю и экзамену.

2. Подготовка к лекционным занятиям (теоретический курс)

На сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Приведены лекции и презентации в соответствии с темами рабочей программы дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Default.aspx

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено рабочей программой дисциплины «Администрирование информационных систем». В дополнении к лекционному материалу и лекционным презентациям, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в рабочей программе Раздел 7. Учебно-методическое и программно-информационное обеспечение.

Рекомендации:

- перед очередной лекцией необходимо просмотреть **материал предыдущей лекции** по своему конспекту, или по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове**.** Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

- ознакомиться с **содержанием очередной лекции** по материалам УМКД на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове, а также по основным источникам литературы в соответствии с рабочей программой дисциплины. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Plans/Plan.aspx?id=236

При затруднениях в восприятии материала необходимо обратиться

- к основным литературным источникам, лекциям (презентациям), к лектору по графику его консультаций или, к преподавателю на лабораторных занятиях.

- на сайте ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове можно обратиться к преподавателю данной дисциплины через чат с преподавателем в разделе «Мое портфолио» на сайте с адресом: ТИ (филиал) ДГТУ в городе Азове. Режим доступа: http://edu.atidstu.ru/Mail/Inbox/Inbox.aspx

-В электронной библиотеке**.** Режим доступа: ntb.donstu.ru

2. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Студентам необходимо ознакомиться:

- с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей.

2.1. Рекомендации по подготовке к теоретическим занятиям

Изучение дисциплины требует систематического и последовательного накопления знаний, следовательно, пропуски отдельных тем не позволяют глубоко освоить предмет. Именно поэтому контроль над систематической работой студентов всегда находится в центре внимания кафедры.

Студентам необходимо:

- перед каждым теоретическим занятием необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущего занятия. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам. Если разобраться в материале опять не удалось, то обратитесь к преподавателю (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

2.2. Рекомендации по подготовке к практическим (лабораторным) занятиям

Студентам следует:

– приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;

– до очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующий теме занятия;

– в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

– в ходе работы давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;

– на занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Студентам, пропустившим занятия (независимо от причин), не имеющим письменного решения задач или не подготовившиеся к данному практическому занятию, рекомендуется не позже чем в 2-недельный срок явиться на консультацию к преподавателю и отчитаться по теме, изучавшейся на занятии.

2.3. Методические рекомендации по работе с литературой

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература. Основная литература - это учебники и учебные пособия. Дополнительная литература - это сборники научных трудов, журнальные и газетные статьи, различные справочники, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту: выбранную статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно- справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие прочитать быстро; - в книге или журнале, принадлежащие самому студенту,

ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет-источником целесообразно также выделять важную информацию; - если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти». Выделяются следующие виды записей при работе с литературой:

Конспект - краткая схематическая запись основного содержания научной работы. Целью является не переписывание произведения, а выявление его логики, системы доказательств, основных выводов. Хороший конспект должен сочетать полноту изложения с краткостью.

Цитата - точное воспроизведение текста. Заключается в кавычки. Точно указывается страница источника.

Тезисы - концентрированное изложение основных положений прочитанного материала.

Аннотация - очень краткое изложение содержания прочитанной работы.

Резюме - наиболее общие выводы и положения работы, ее концептуальные итоги. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки ясного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

3 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельная (внеаудиторная) работа	
Задания для студентов	Кол-во часов
Организация файловой системы	10
Процессы, потоки и нити	11
Синхронизация процессов и потоков	10
Управление памятью	9
Виртуальная память	11
Установка обособленного загрузчика. Установка и обновление GRUB2	11
Изучение процесса запуска ОС. Уровни исполнения System V	10
Основные утилиты для работы с файлами в ОС GNU/Linux	7
Основные команды для работы с процессами (ps, top, htop, kill, killall, jobs)	7
	86

Приложение А

Реферат оформляется в текстовом процессоре Microsoft Word, объемом 7-9 страниц.

Требования к структуре документа:

1. Титульный лист – тема доклад, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Оглавление с указание нумерации страниц;

3. Текст доклада;

4. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210х297мм), ориентация – книжная.

Параметры страницы поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman.

Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт, прописные буквы;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Отступы: интервал перед заголовком 0 пт, интервал после заголовка 0 пт.

Выравнивание текста: по ширине;

Нумерация заголовков:

1

1.1

1.1.1

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: 1,5 строки; м*ежсимвольный интервал*: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; по центру.

При написании доклада, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

Оценка "отлично" выставляется студенту, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите студент обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему; дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

Оценка "хорошо" выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию доклада; при защите работы студент дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов; может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры. А также оценка "хорошо" может быть выставлена студенту в случае, если оформление и содержание доклада, соответствует требованию и выбранной теме доклада; при защите работы студент не в полной мере излагает материал; знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена и не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Приложение Б

Объем презентации не более 20 слайдов (оптимально 12-15 слайдов).

Структура презентации:

1 слайд – титульный, заголовочный слайд: указывается тема презентации, а также кто выполнит – ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2 слайд – содержание, оглавление презентации;

3 слайд – используемая литература;

все последующие слайды – лаконично раскрывают содержание информации по теме;

последний слайд – заключение – приводятся выводы, обобщения, ключевые положения.

При создании презентации необходимо обратить внимание на ряд требований, предъявляемых к оформлению презентации

Оформление слайдов:

Стиль	- соблюдайте единый стиль оформления; - избегайте стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; - вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки);
Фон	- для фона выбирайте более холодные тона (синий или зеленый);
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: - один для фона, один для заголовков, один для текста; - для фона и текста используйте контрастные цвета;

	- обратите особое внимание на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	- используйте возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде - не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами, они не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде

Представление информации:

Содержание информации	- используйте короткие слова и предложения; - минимизируйте количество предлогов, наречий, прилагательных; - заголовки должны привлекать внимание аудитории;
Расположение информации на странице	- предпочтительно горизонтальное расположение информации; - наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; - если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней;
Шрифты	- для заголовков – не менее 24 пт; - для основного текста – не менее 18 пт; - шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; - нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; - для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или

	подчеркивание; - нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже строчных букв)
Объем информации	- не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации; - наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отображаются по одному на каждом отдельном слайде;
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: - с текстом; - с таблицами; - с диаграммами.

При создании презентации, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы

а) соответствие содержания теме;

б) правильная структурированность информации;

в) наличие логической связи изложенной информации;

г) эстетическое оформление, его соответствие требованиям;

д) работа представлена в срок.

Каждый критерий оценивается в 5 баллов.

Суммарная оценка 25 баллов. Менее 13 баллов - "неудовлетворительно"; 13 - 17 баллов - "удовлетворительно"; 18 - 22 баллов - "хорошо"; 23 - 25 баллов - "отлично".

Приложение В

Самостоятельная работа в форме выполнения упражнений, решения задач выполняется на компьютере с используемым программным обеспечением. Составляется отчет о выполненном упражнении и решении задачи в соответствующем программном обеспечении (ОС Windows, Microsoft Word).

Требования к отчету:

1. Титульный лист – тема работы, выполнил - ФИО студента, группа, специальность, проверил – ФИО преподавателя;

2. Содержание работы: формулировка задачи, используемое программное обеспечение, последовательность действий по выполнению работы на компьютере, результаты задачи (скриншоты).

3. Перечень используемых источников.

Рекомендации по оформлению текста:

Размер бумаги – А4 (210x297мм).

Параметры страницы

Поля: верхнее – 2 см; нижнее – 2 см; левое – 2 см; правое – 2 см.

Тип шрифта: Times New Roman. Шрифт основного текста: обычный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков разделов: полужирный, размер 14 пт;

Шрифт заголовков подразделов: полужирный, размер 14 пт;

Заголовки без нумерации форматируются по центру, нумерованные заголовки форматируются по ширине страницы.

Межстрочный интервал: одинарный; межсимвольный интервал: обычный.

Нумерация страниц: внизу страницы; от центра.

При написании работы, можно использовать рекомендуемую литературу, так и ресурсы Интернет.

Критерии оценки результатов самостоятельной работы:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если работа логично построена,

соответствует требованию и выбранной теме; представлен ход выполнения работы и решения задачи; работа представлена в установленный срок.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если имеются замечания по оформлению или содержанию отчета от 2 до 3 ошибок или неточностей; работа оформлена и представлена в установленный срок.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если работа не выполнена или содержит материал не соответствующий данному вопросу.

Во всех остальных случаях работа оценивается на «удовлетворительно».

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

«ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

Часть 1

Дисциплина «Администрирование информационных систем»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202_

УДК 51-74

Методические указания для выполнения лабораторных работ по дисциплине «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ». Часть 1..

В методических указаниях рассматриваются примеры применения математических моделей в конкретных прикладных задачах естественных наук и содержатся задания для самостоятельной работы. Дисциплина «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ».

Предназначены для обучающихся направления 09.03.02 – Информационные системы и технологии очной формы обучения

Лабораторная работа № 1
«ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

Цель работы: изучение методов решения задач линейного программирования в Excel.
Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:
Задача 1. Найти решение задачи линейного программирования:

$$L(X) = 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 18x_2 + 34x_4 <= 56, \\ 2x_1 + 7x_3 + 4x_4 <= 91, \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4 <= 26, \\ x_j \ge 0 \left(\mathrm{j} = \overline{1,4} \right). \end{cases}$$

Решение. Введем данные и формулы в Excel, как показано на рис.1.1.

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица коэффициентов				Левые части неравенств	Правые части неравенств
2	15	18	0	34	=СУММПРОИЗВ(A2:D2;A$8:D$8)	56
3	2	0	7	4	=СУММПРОИЗВ(A3:D3;A$8:D$8)	91
4	2	8	5	9	=СУММПРОИЗВ(A4:D4;A$8:D$8)	26
5	Коэффициенты целевой функции C1,C2,C3,C4				Целевая функция	
6	5	6	2	3	=СУММПРОИЗВ(A6:D6;A$8:D$8)	
7	Решение X1,X2,X3,X4					
8	0	0	0	0		

Рис.1.1

В окне «Поиск решения» добавьте ограничения как на рис.1.2 и нажмите «Найти решение».

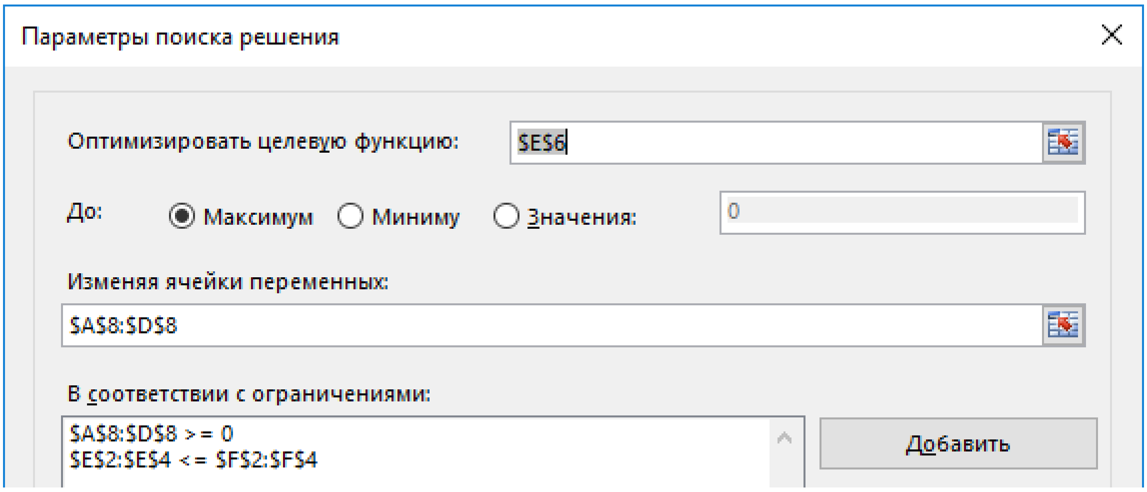


Рис.1.2

Полученный результат приведен на рис.1.3.

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица коэффициентов				Левые части неравенств	Правые части неравенств
2	15	18	0	34	56	56
3	2	0	7	4	33,41333333	91
4	2	8	5	9	26	26
5	Коэффициенты целевой функции C1,C2,C3,C4				Целевая функция	
6	5	6	2	3	26,08	
7	Решение X1,X2,X3,X4					
8	3,73	0,00	3,71	0,00		

Рис.1.3

Ответ: X1 = 3.73, X2 = 0, X3 = 3,71, X4 = 0. Lmax = 26.08

Задания для самостоятельной работы:
Решить задачу планирования производства. Получить данные у преподавателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017

Лабораторная работа № 2
«РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В MATLAB»

Цель работы: изучение методов решения транспортной задачи в Matlab.
Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 2. Решить транспортную задачу. На 4-х складах имеется однородный груз, котрый необходимо перевезти 3-м потребителям. Найти оптимальный план перевозок (минимум затрат) при заданных ограничениях. (табл.2.1).

Таблица 2.1

Склады	Удельные затраты	Запасы

	Потребитель 1	Потребитель 2	Потребитель 3	
Склад 1	3	5	2	100
Склад 2	4	3	6	120
Склад 3	5	4	3	180
Склад 4	2	6	4	100
Потребности	150	150	200	

Составим задачу линейного программирования.

Матрица затрат $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Искомый план перевозок $X = \{x_{ij}, i = 1,2,3,4; j = 1,2,3\}$

Вектор запасов $b = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 180 \\ 100 \end{pmatrix}$. Вектор потребностей $a = (150 \quad 150 \quad 200)$

Математическая модель:

$$f = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij} \to \min, \quad \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = a_j, \; j = 1, 2,3; \quad \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = b_i, \; i = 1, 2,3,4; \quad x_{ij} >= 0$$

Решение в Matlab.

```
f = [3;5;2;4;3;6;5;4;3;2;6;4];
Aeq = [1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0;
        0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1;
        1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0;
        0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1 0;
        0 0 1 0 0 1 0 0 1 0 0 1];
beq = [100;120;180;100;150;150;200];
lb = zeros(12,1);
[x,fval] = linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb);
Optimal solution found.
x
 =   50    0   50    0  120    0    0   30  150  100    0    0   [будет выведен столбец]

fval =
     1380
```

Ответ: План перевозок: $X = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 \\ 0 & 120 & 0 \\ 0 & 30 & 150 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Затраты на перевозки: 1380.

Решить транспортную задачу. Получить данные у преподавателя.

Лабораторная работа № 3
«ПАРНАЯ ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ»

Цель работы: изучение методов построения уравнения парной линейной регрессии в Excel.
Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 3. 1) Построить уравнение регрессии $\bar{y}_x = b_0 + b_1 x$ по данным из табл. 3.1.

2) Проверить значимость коэффициентов регрессии для уровня α = 0,05.

3) Построить доверительный интервал для генерального коэффициента регрессии β_{yx} с уровнем значимости α = 0,05.

4) Проверить значимость уравнения регрессии с уровнем значимости α = 0,07.

Таблица 3.1

i	x_i	y_i	*i*	x_i	y_i	*i*	x_i	y_i
1	0,43	3,61	11	0,32	3,55	21	0,52	3,65
2	0,25	3,34	12	0,79	4,42	22	0,38	3,87
3	0,52	3,41	13	0,70	3,54	23	0,32	3,83
4	0,63	4,29	14	0,95	4,43	24	0,34	3,35
5	0,01	3,43	15	0,60	3,98	25	0,28	3,87
6	0,91	4,42	16	0,98	4,17	26	0,91	3,70
7	0,41	3,81	17	0,75	4,08	27	0,90	3,61
8	0,45	3,39	18	0,69	3,71	28	0,60	3,90
9	0,05	4,00	19	0,46	3,83	29	0,45	3,44
10	0,44	3,92	20	0,63	3,72	30	0,84	3,72

Решение. 1) Запишем исходные данные в диапазон A1:B31 (табл. 2.2). В ячейках A1:C1 и D2:D13 введем для наглядности указанные обозначения.

В ячейку E2 введем формулу

=(СУММ(A2:A31)*СУММ(B2:B31)-30*СУММПРОИЗВ(A2:A31;B2:B31)) /(СУММ(A2:A31)^2-30*СУММКВ(A2:A31))

В ячейку E3 введем формулу =СРЗНАЧ(B2:B31)-E2*СРЗНАЧ(A2:A31).

В ячейках E2, E3 получим коэффициенты уравнения регрессии b_1 = 4,94675; b_0 = 0,56. Уравнение регрессии имеет вид $\bar{y}_x = 0{,}56 + 4{,}94675x$.

Чтобы выполнить задания 2) и 3) в ячейки E4:E13 вводим формулы, как показано в табл.3.2, являющейся частью табл. 3.3. Для просмотра формул в программе *Excel* надо выполнить команду «Сервис–Параметры» и поставить флажок в строке «формулы».

Таблица 3.2

	D	**E**
4	xcp=	=СРЗНАЧ(A2:A31)
5	ycp=	=СРЗНАЧ(B2:B31)
6	socт=	=СУММКВРАЗН(C2:C31;B2:B31)/28
7	sb1=	=E6/(30*СУММ((A2:A31-E4)^2))
8	sb0=	=E6*СУММКВ(A2:A31)/(30*СУММ((A2:A31-E4)^2))
9	tb1=	=ABS(E2)/КОРЕНЬ(E7)
10	tb0=	=ABS(E3)/КОРЕНЬ(E8)
11	tкрит=	=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;28)
12	F=	=28*СУММ((C2:C31-E52)^2)/СУММКВРАЗН(C2:C31;B2:B31)
13	Fкрит=	=FРАСПОБР(0,05;1;28)

Результаты вычислений приведены в табл.3.3 (Показаны только 16 строк данных).

Таблица 3.3

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	*x*	*y*	утеор		
2	0,43	3,61	3,727561	b1=	0,598907286

3	0,25	3,34	3,619757	b0=	3,47
4	0,52	3,41	3,781462	xcp=	0,55
5	0,63	4,29	3,847342	ycp=	3,80
6	0,01	3,43	3,47602	socт=	0,081533115
7	0,91	4,42	4,015036	sb1=	0,02100934
8	0,41	3,81	3,715582	sb0=	1,51990504
9	0,45	3,39	3,739539	tb1=	4,131934193
10	0,05	4,00	3,499976	tb0=	2,814654319
11	0,44	3,92	3,73355	tкрит=	2,048407115
12	0,32	3,55	3,661681	F=	164,447372
13	0,79	4,42	3,943167	Fкрит=	4,195971707
14	0,70	3,54	3,889266	Дов.инт. Для betayx	
15	0,95	4,43	4,038992	нижн.гран.	0,177612121
16	0,60	3,98	3,829375	верх.гран.	1,020202452
17	0,98	4,17	4,05696		

2) Проверка значимости коэффициентов регрессии. Так как выполнены неравенства

$$t_{b_1} = 33{,}45 > t_{кр}(0{,}05;28) = 2{,}05; \quad t_{b_0} = 0{,}45 < t_{кр}(0{,}05;28) = 2{,}05$$

то делаем вывод о том, что коэффициент b_1 значим, а коэффициент b_0 незначим.

3) В ячейку E15 вводим следующую формулу

=E2-E11*СТАНДОТКЛОНП(B2:B31)*КОРЕНЬ(1-КОРРЕЛ(A2:A31;B2:B31)^2)/(СТАНДОТКЛОНП(A2:A31)*КОРЕНЬ(28))

В ячейку E16 вводим формулу

=E2+E11*СТАНДОТКЛОНП(B2:B31)*КОРЕНЬ(1-КОРРЕЛ(A2:A31;B2:B31)^2)/(СТАНДОТКЛОНП(A2:A31)*КОРЕНЬ(28))

Доверительный интервал для генерального коэффициента регрессии β_{yx} с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ имеет вид $4{,}51 < \beta_{yx} < 5{,}38$.

4) Проверка значимости уравнения регрессии (ячейки E12, E13): $F = 54{,}3 > F_{крит} = 4{,}2$.

Уравнение значимо с уровнем доверия 1 – 0,05 = 0,95 = 95%.

Задания для самостоятельной работы:

Построить уравнение регрессии $\bar{y}_x = b_0 + b_1 x$. Проверить значимость коэффициентов регрессии для уровня $\alpha = 0{,}05$. Построить доверительный интервал для генерального коэффициента регрессии β_{yx} с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Проверить значимость уравнения регрессии с уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$.

Получить индивидуальное задание и данные у преподавателя.

Лабораторная работа № 4
«МОДЕЛИ МНОЖЕСТВЕННОЙ РЕГРЕССИИ»

Цель работы: изучение методов построения уравнения множественной линейной регрессии в Excel.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 4.1. По данным таблицы 4.1

1) построить уравнение множественной линейной регрессии $\bar{y}_x = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$;

2) Проверить для уровня $\alpha = 0{,}05$ значимость уравнения регрессии;

3) Проверить значимость коэффициентов регрессии для уровня α =0,05.

Таблица 4.1

i	X_1	X_2	X_3	Y	i	X_1	X_2	X_3	Y	i	X_1	X_2	X_3	Y
1	1,8	1	3,4	20,5	11	4,6	2,5	2,1	25,5	21	2,8	4,3	3,6	33

2	2,3	2,6	0,3	14,1	12	0,8	3,8	0,1	13,6	22	3,4	3,8	4,5	36,5
3	4,6	2	4,3	32,6	13	4,7	1,5	4,9	34	23	2,3	3,7	2	24,1
4	0,6	1,3	3	17,4	14	0,9	3,9	0,2	14,4	24	4	3,6	0,3	20,4
5	0,9	0,2	4,4	20,3	15	3,9	1,7	4,9	32,8	25	2,3	0,4	0,5	8
6	0,4	2,1	0,8	10,7	16	3,4	0,4	3,3	21,3	26	4,5	1,4	1,2	18,4
7	0,2	1,2	2	12,3	17	4,5	1,2	4,2	29,7	27	2,7	3	0,9	18,3
8	0,5	4,6	3,5	28,9	18	2,4	2,2	3,6	25,9	28	3,6	4,2	2,9	31,7
9	1,4	4,9	0,8	20,8	19	0,2	3,3	3,6	24,8	29	2,9	2,8	2,9	25,9
10	4,9	0,8	4,1	28,9	20	2,8	4	4,5	35,7	30	3,9	3,4	3	30,3

Решение. Введите данные из табл.4.1 в программе *Excel* в диапазоне A1:D31: в ячейках A1, B1, C1 и D1 введите метки переменных X1, X2, X3 и Y, в соответствующих столбцах введите значения переменных.

Выполните команду «Данные — Анализ данных» и в открывшемся окне выберите процедуру «Регрессия». В окне «Регрессия» в строке «Входной интервал Y:» укажите диапазон D1:D31, в строке «Входной интервал X:» введите диапазон A1:C31, в строке «Метки» поставьте флажок, задайте уровень надежности 95% (1 – 0,05 = 0,95), и нажмите «Ок». Полученные результаты будут на новом рабочем листе.

Выводы.

1) Коэффицинты уравнения регрессии приведены в ячейках B17:B20, уравнение линейной регрессии имеет вид $\bar{y}_x = 0{,}319 + 2{,}032x_1 + 2{,}972x_2 + 3{,}974x_3$.

2) В разделе «Дисперсионный анализ» проводится оценка значимости уравнения регрессии. Значение в ячейку F12 практически равно нулю, т.е. это значение меньше уровня 0,05, что говорит о том, что уравнение регрессии значимо.

3) В ячейках D17:D20 приведены значения *t*-статистики, а в ячейках E17:E20 — значимости этих статистик. Так как эти значения также близки нулю, все коэффициенты регрессии значимы с данным уровнем 0,05. Это следует также из того, что доверительные интервалы для коэффициентов не включают ноль.

Задание. Построить уравнение регрессии $\bar{y}_x = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$. Проверить значимость коэффициентов регрессии для уровня α = 0,05. Построить доверительный интервал для генерального коэффициента регрессии β_{yx} с уровнем значимости α = 0,05. Проверить значимость уравнения регрессии с уровнем значимости α = 0,05. Получить индивидуальное задание и данные у преподавателя.

Лабораторная работа № 5
«ПРОГНОЗИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ФУРЬЕ»

Цель работы: изучение методов построения прогноза временного ряда с помощью рядов Фурье в Excel.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 5. В табл. 5.1 приведены данные о ежемесячных продажах продукции предприятия за два года. Составить ряды Фурье для m = 4 и вычислить варианты прогноза на следующий год.

Таблица 5.1

Даты	Продажи	Даты	Продажи	Даты	Продажи	Даты	Продажи
31 янв 08	100,1	31 июл 08	101,5	31 янв 09	100,2	31 июл 09	101,9
29 фев 08	102,0	31 авг 08	101,8	28 фев 09	102,5	31 авг 09	102,0
31 мар 08	102,7	30 сен 08	100,4	31 мар 09	101,7	30 сен 09	100,4
30 апр 08	102,2	31 окт 08	101,3	30 апр 09	102,6	31 окт 09	101,2

31 май 08	102,4	30 ноя 08	101,6	31 май 09	104,2	30 ноя 09	99,5
30 июн 08	101,9	31 дек 08	99,5	30 июн 09	101,9	31 дек 09	99,2

Решение. Подготовим расчетный лист. Введите в ячейках A1, B1, C1 и D1 текст-метку «Даты», обозначения переменных t, x и Y, как показано на рис.5.1 (приведена только часть расчетной таблицы).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Даты	t	x	Y	Y*COS(x)	Y*SIN(x)	Y*COS(2*x	Y*SIN(2*x)	Y*COS(3*x	Y*SIN(3*x)	Y*COS(4*x	Y*SIN(4*x)	Yt 4
2	31.янв.16	0	0,00	100,1	100,1	0,0	100,1	0,0	100,1	0,0	100,1	0,0	100,3
3	29.фев.16	1	0,26	102,0	98,6	26,4	88,4	51,0	72,2	72,2	51,0	88,4	101,5
25	31.дек.17	23	6,02	99,2	95,8	-25,7	85,9	-49,6	70,2	-70,2	49,6	-85,9	99,6
26	31.янв.18	24	6,28	202,9	-0,239	-0,080	-0,655	1,079	0,118	0,285	-0,378	0,232	100,3
27	28.фев.18	25	6,54	a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4	101,5

Рис.5.1

В ячейки A2, A3 введите даты в виде «31 янв 2008» и «29 фев 2008», выделите ячейки A2:A3 и протяните маркером заполнения вниз до ячейки A37, т.е. до появления даты «31.дек.10». Мы ввели лишний год для прогноза.

В диапазоне B2:A37 введите значения переменной t: 0, 1, …, 35.

Присвойте диапазону B2:A37 имя t. Для этого выделите диапазон B2:A37, введите в поле имени букву t и нажмите Enter.

В ячейку C2 введите формулу =2*ПИ()*t/24. Ячейку C2 протяните маркером заполнения вниз до ячейки C37.

Присвойте диапазону C2:C37 имя x. Для этого выделите диапазон C2:C37, введите в поле имени букву x и нажмите Enter.

В диапазоне D2:D25 введите значения переменной Y, т.е. объемы ежемесячных продаж.

Присвойте диапазону D2:D25 имя Y. Для этого выделите диапазон D2:D25, введите в поле имени букву Y и нажмите Enter.

Построим ряды Фурье с числом гармоник $m = 4$.

Для вычисления коэффициентов ряда по формулам

$$a_0 = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i\,,\quad a_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \cos\left(kx_i\right),\quad b_k = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \sin\left(kx_i\right) \qquad (1)$$

вычислим слагаемые сумм в правой части этих формул.

Введите в ячейках E1:L1 введите обозначения столбцов Y*COS(x), Y*SIN(x), Y*COS(2*x), Y*SIN(2*x), Y*COS(3*x), Y*SIN(3*x), Y*COS(4*x), Y*SIN(4*x). Эти обозначения будут подсказывать вид формул.

В ячейки E2:L2 введите соответственно «подсказкам» следующие формулы =Y*COS(x), =Y*SIN(x), =Y*COS(2*x), =Y*SIN(2*x), =Y*COS(3*x), =Y*SIN(3*x), =Y*COS(4*x), Y*SIN(4*x)

Выделите диапазон E2:L2 и маркером заполнения протяните вниз до строки E25:L25.

Вычислим в ячейках D26:L26 коэффициенты ряда Фурье по формулам (1).

Введите в ячейку D26 формулу =СУММ(D2:D25)/12. Ячейку D26 маркером заполнения протяните вправо до P26.

Теперь вычислим с помощью формулы

$$Y_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left(a_k \cdot \cos\left(kx\right) + b_k \cdot \sin\left(kx\right)\right),\ \text{где}\ x = \frac{2\pi t}{n} \qquad (2)$$

сглаженные и прогнозные значения для числа гармоник $m = 6$.

Присвоим имена ячейкам D26:P26. Введите имена a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5, a_6, b_6 в ячейки D27:P27.

Присвойте ячейке D26 имя *a*_0. Для этого щелкнуть левой кнопкой мыши по ячейке D26, в поле имени ввести *a*_0 и нажать Enter. Аналогично присвойте имена остальным ячейкам, пользуясь подсказками.

Введите в ячейки M1 обозначение Yt 4. В ячейку М2 введите формулу
=a_0/2+a_1*COS(x)+b_1*SIN(x)+a_2*COS(2*x)+b_2*SIN(2*x)+
a_3*COS(3*x)+b_3*SIN(3*x)+a_4*COS(4*x)+b_4*SIN(4*x)

Протяните ячейку М2 маркером заполнения вниз до М37.

Построим график. Выделите диапазон D2:D25 и удерживая нажатой клавишу «Ctrl» выделите М2:М37 и с помощью «Вставка диаграмм» выберите тип «График».

Щелкните правой кнопкой по диаграмме, выберите «Выбрать данные», измените «Подписи горизонтальной оси на диапазон А2:А37, введите «Заголовок диаграммы» «Ряд Фурье *m* = 4» и нажмите «Готово».

На рис.5.2 приведен полученный график.

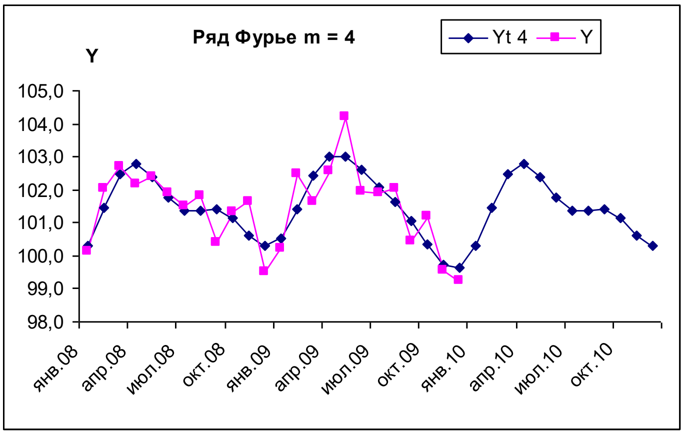


Рис.5.2

Задание. Построить ежемесячный прогноз на следующий год по данным ежемесячных продаж за два года. Индивидуальные варианты данных получить у преподавателя.

Лабораторная работа № 6
«ПРОГНОЗИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ ХОЛТА-ВИНТЕРА (ХОЛЬТА-УИНТЕРСА)»

Цель работы: изучение методов построения прогноза временного ряда с помощью модели Холта-Винтера (Хольта-Уинтерса в Excel.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 6.1. В таблице 1 приведены объемы продаж по месяцам за четыре года 2006-2009. Составить прогноз на 2010 год.

Таблица 6.1

Месяц	Объем	Месяц	Объем	Месяц	Объем	Месяц	Объем
31.1.06	2 064	31.1.07	2 928	31.1.08	2 733	31.1.09	3 734
28.2.06	2 271	28.2.07	3 280	29.2.08	3 423	28.2.09	4 502
31.3.06	2 803	31.3.07	3 246	31.3.08	4 467	31.3.09	5 050
30.4.06	3 980	30.4.07	4 346	30.4.08	4 653	30.4.09	5 413
31.5.06	3 235	31.5.07	4 060	31.5.08	3 691	31.5.09	4 710
30.6.06	2 582	30.6.07	3 937	30.6.08	3 873	30.6.09	4 946
31.7.06	2 038	31.7.07	2 887	31.7.08	3 866	31.7.09	3 626
31.8.06	1 475	31.8.07	1 998	31.8.08	2 812	31.8.09	3 445
30.9.06	1 832	30.9.07	2 358	30.9.08	2 376	30.9.09	3 194
31.10.06	981	31.10.07	2 468	31.10.08	2 969	31.10.09	3 058
30.11.06	1 690	30.11.07	2 335	30.11.08	2 605	30.11.09	3 368
31.12.06	1 741	31.12.07	2 251	31.12.08	2 841	31.12.09	4 431

Решение. Оформление расчетного листа в *Excel* показано на рис.6.1.
Введите данные о продажах в диапазоне A15:B62.

	A	B	C	D	E	F
1	Реализация продукции				Сезонный фактор	Среднеквадратическое отклонение =
2					Ft	
3					1	
4					1	
5					1	861,94
6					1	
7		АА =	0,2		1	
8		ВВ =	0,2		1	
9		СС =	0,3		1	
10		Реализация	Стационарный фактор	Линейный рост	1	
11					1	
12	Месяцы				1	Прогноз
13		dt	ut	bt	1	ft
14			2224	0	1	
15	31.1.06	2 064	2 192	-6	0,98	
16	28.2.06	2 271	2 203	-3	1,01	2 186
17	31.3.06	2 803	2 320	21	1,06	2 200
18	30.4.06	3 980	2 669	87	1,15	2 342
19	31.5.06	3 235	2 852	106	1,04	2 756
20	30.6.06	2 582	2 882	91	0,97	2 958
21	31.7.06	2 038	2 786	53	0,92	2 973
22	31.8.06	1 475	2 567	-1	0,87	2 840
23	30.9.06	1 832	2 419	-31	0,93	2 566
24	31.10.06	981	2 107	-87	0,84	2 388
25	30.11.06	1 690	1 954	-100	0,96	2 020
26	31.12.06	1 741	1 831	-105	0,99	1 854

Рис.6.1

Введите в A15 дату 31.01.06. Затем протяните ячейку A15 вниз до A74.

Введите в ячейках B15:B62 объемы продаж из табл.6.1

Теперь поясним, как оформляется расчетная часть листа.

В диапазоне A1:F13, кроме ячейки F5, введите тексты и числовые значения, как на рис.10.19. Некоторые ячейки объедините как на рис.6.1.

Присвойте ячейкам C7:C9 указанные в соседних ячейках имена:

выделите C7, в поле имени введите «AA» (английские буквы!) и нажмите Enter;

выделите C8, в поле имени введите «BB», нажмите Enter;

выделите C9, в поле имени введите «CC», нажмите Enter.

Расчет стационарного фактора (среднеежемесячного значения).

В качестве начального значения u_0 выберем среднее за первый год. Для вычисления в ячейку C14 введите формулу =СРЗНАЧ(B15:B26).

В качестве начальных значений сезонного фактора мы принимаем единичные значения, они записаны в ячейках E3:E14.

Введите в ячейку C15 формулу =AA*B15/E3+(1-AA)*(C14+D14). Протяните C15 вниз до C62.

Расчет линейного роста.

Введите в ячейку D14 начальное значение линейного роста, т.е. число 0, а в ячейку D15 формулу: =BB*(C15-C14)+(1-BB)*D14. Ячейку D15 протяните вниз до D62.

Расчет сезонного фактора.

Введите в ячейки E3:E14 число 1, а в ячейку E15 формулу: =CC*B15/C15+(1-CC)*E3.

Протяните E15 вниз до E62.

Прогноз на следующие 12 месяцев.

Введите в ячейку F16 формулу =(C15+D15)*E4. Ячейку F16 протяните вниз до F62.

Введите в ячейках E63:E74 числа от 1 до 12.

В ячейку F63 введите формулу =(C$62+D$62*E63)*E51. Затем протяните ячейку F63 вниз до F74.

Вычисление ошибки прогноза.

Введите в ячейку F5 формулу =КОРЕНЬ(СУММКВРАЗН(F16:F62;B16:B62)/47).

Получим значение ошибки 777,10.

Постройте график прогнозированных значений.

Выделите диапазон A15:B74. С помощью «Мастера диаграмм» постройте тип диаграммы «График». Получим график, который содержит на оси *X* больше точек.

Щелкните правой кнопкой мыши по диаграмме и выберите команду меню «Исходные данные». В появившемся окне перейдите на вкладку «Ряд», нажмите кнопку «Добавить», в строке «Имя» укажите F12, в строке «Значения» введите F15:F74 и нажмите «Ок».

Снова щелкните правой кнопкой мыши по диаграмме и выберите команду меню «Параметры диаграммы…». В появившемся окне перейдите на вкладку «Заголовки» и введите заголовок «Прогноз на 2010 год», перейдите на вкладку «Легенда» и выберите «Размещение» «Внизу». Получим график на рис.6.2.

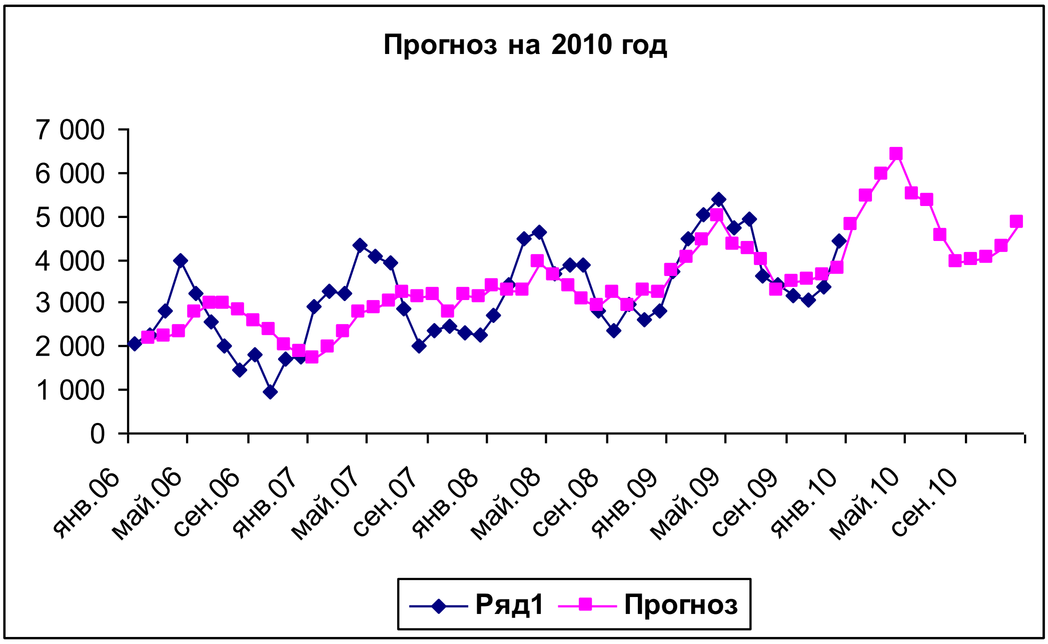


Рис.6.2

Как видим, при A = B = 0,2 и C = 0,3 получен прогноз на 2010 год.

Задание. Построить ежемесячный прогноз на следующий год по данным ежемесячных продаж за четыре года. Индивидуальные варианты данных получить у преподавателя.

Лабораторная работа № 7
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ В MATLAB»

Цель работы: изучение методов решения задачи о рюкзаке в Matlab.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 7.1. Решить задачу о рюкзаке по данным табл.7.1. Требуется выбрать оптимальный набор предметов, чтобы их суммарная стоимость была максимальной, а сумма размеров не превышала 250.

Таблица 7.1

Номер предмета	Размер предмета	Стоимость предмета	Размер рюкзака
1	50	14	250
2	75	12	
3	155	20	
4	90	18	
5	85	11	
6	35	15	

Решение в Matlab версии после 2014 года (intlinprog). Введите следующие команды:

```
f = [14; 12; 20; 18; 11; 15]; A = [50 75 155 90 85 35];
b = 250; intcon=[1,2,3,4,5,6]; lb=zeros(6,1); ub=ones(6,1);
[x,fval] = intlinprog(-f,intcon,A,b,[],[],lb,ub);
x
fval = -fval
```

В результате вычислений получится вектор оптимальных значений булевых переменных и оптимальное значение целевой функции:

```
x =     1    1    0    1    0    1    [будет выведен столбец]

fval =
       59
```

Ответ: Оптимальный набор предметов 1-й, 2-й, 4-й и 6-й. При этом стоимость составит 59.

Задание. Решить задачу о рюкзаке по индивидуальным данным, полученным у преподавателя.

Лабораторная работа № 8
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ»

Цель работы: изучение методов решения задачи о назначении в Matlab.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 8.Исходные данные для решения задачи о назначении представлены в табл. 8.1. Элементы матрицы означают затраты. Необходимо найти такой вариант назначений, который имеет минимальные суммарные затраты.

Таблица 8.1

Номер работника i	Номер работы j		
	1	2	3
1	7	8	10
2	11	9	12
3	6	8	9

Представим матрицу затрат в виде вектора-столбца f, тогда решение тоже вектор-столбец x.

Решение в Matlab версии после 2014 года (intlinprog). Введите следующие команды:

```
f = [7; 8; 10; 11; 9; 12; 6; 8; 9];
A = [1 1 1 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 1 1 1 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 1 1 1;
     1 0 0 1 0 0 1 0 0;
     0 1 0 0 1 0 0 1 0;
```

```
        0 0 1 0 0 1 0 0 1];
intcon = [1,2,3,4,5,6,7,8,9];
lb =zeros(9,1); ub=ones(9,1);
b = ones(6,1);
  [x,fval]= intlinprog(f,intcon, [ ], [ ], A, b,lb,ub);
x
fval
```

В результате вычислений получится вектор оптимальных значений булевых переменных и оптимальное значение целевой функции:

x =   0   0   1   0   1   0   1   0   0   [будет выведен столбец]

fval =

25.

Ответ. Таким образом, как следует из полученных результатов, первый работник назначается на третью работу, второй – на вторую работу, третий – на первую работу, а минимальные затраты, связанные назначением работников на работы, равны 25.

Задание. Получить у преподавателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017
2. Соболь Б.В.и др. Практикум по статистике в Excel

Технологический институт (филиал) ДГТУ в г. Азове
ФАКУЛЬТЕТ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра Вычислительная техника и программирование

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ
ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

«ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

Часть 2

Дисциплина «Администрирование информационных систем»

Специальность 09.03.02 Информационные системы

Азов
202_

УДК 51-74

Методические указания для выполнения лабораторных работ по дисциплине «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ». Часть 2.

В методических указаниях рассматриваются примеры применения математических моделей в конкретных прикладных задачах естественных наук и содержатся задания для самостоятельной работы. Дисциплина «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ».

Предназначены для обучающихся направления 09.03.02 – Информационные системы и технологии очной формы обучения

Лабораторная работа № 1
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ»

Цель работы: изучение методов решения задач сетевого планирования.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача **1.** Провести расчет сетевого графика при $a = 0$, представленного на рис.1. Вершины означают события завершения предшествующих работ, дуги — работы, а веса означают время выполнения работы. Найти критические работы.

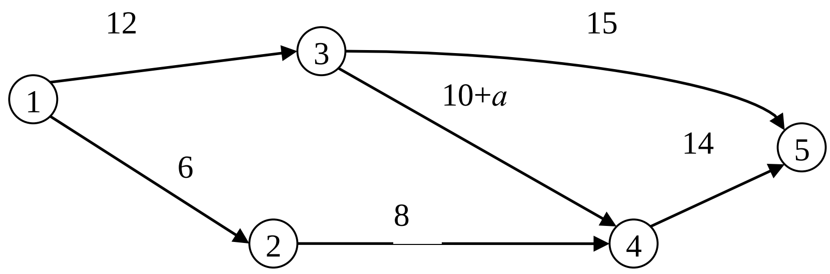


Рис. 1

Решение. Найдем сроки наступления событий.

Ранние сроки наступления событий:

Предшествующим событию 2 на критическом пути является событие 1.

$$T_{\text{ран}}(1) = 0;\ T_{\text{ран}}(2) = T_{\text{ран}}(1) + t(1, 2) = 0 + 6 = 6.$$

Предшествующим событию 3 на критическом пути является событие 1.

$$T_{\text{ран}}(3) = T_{\text{ран}}(1) + t(1, 3) = 0 + 12 = 12.$$

Предшествующим событию 4 на критическом пути является событие 3.

$T_{\text{ран}}(4) = \max[T_{\text{ран}}(k) + t(k, 4)] = \max[T_{\text{ран}}(2) + t(2, 4);\ T_{\text{ран}}(3) + t(3, 4)] = \max[6 + 8;\ 12 + 10] = 22;$

Предшествующим событию 5 на критическом пути является событие 4.

$$T_{\text{ран}}(5) = \max[T_{\text{ран}}(k) + t(k, 5)] = \max[T_{\text{ран}}(3) + t(3, 5);\ T_{\text{ран}}(4) + t(4, 5)] =$$
$$= \max[12 + 15;\ 22 + 14] = 36;$$

Результаты расчетов заносим в табл. 1.

По номерам предшествующих событий находим критический путь: 1–3–4–5. Критическое время

$$T_{\text{крит}} = T_{\text{ран}}(5) = 36 \text{ ед.}$$

Найдем поздние сроки наступления событий, (параметр i изменяется в обратном порядке):

$$T_{\text{поздн}}(5) = T_{\text{ран}}(5) = 36;$$
$$T_{\text{поздн}}(4) = T_{\text{поздн}}(5) - t(4, 5) = 36 - 14 = 22;$$

$T_{поздн}(3) = \min[T_{поздн}(4) - t(3, 4); T_{поздн}(5) - t(3, 5)] = \min[22 - 10; 36 - 15] = 12;$

$T_{поздн}(2) = T_{поздн}(4) - t(2, 4) = 22 - 8 = 14;$

$T_{поздн}(1) = \min[T_{поздн}(2) - t(1, 2); T_{поздн}(3) - t(1, 3)] = \min[14 - 6; 12 - 12] = 0;$

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Событие i	Ранний срок наступления события, $T_{ран}(i)$	Предшествующее событие на критическом пути	Поздний срок наступления события $T_{поздн}(i)$	Резерв времени события $R(i) = T_{поздн}(i) - T_{ран}(i)$
1	0	–	0	0 – 0 = 0
2	6	1	14	14 – 6 = 8
3	12	1	12	12 – 12 = 0
4	22	3	22	22 – 22 = 0
5	36	4	36	36 – 36 = 0

Вычислим временные параметры работ. Расчетные формулы и результаты вычислений приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

Работа, (i, j)	Время работы, $t(i, j)$	Ранний срок начала $T_{рн}(i, j) = T_{ран}(i)$	Поздний срок окончания $T_{по}(i, j) = T_{поздн}(j)$	Ранний срок окончания $T_{ро}(i, j) = T_{ран}(i) + t(i, j)$	Поздний срок начала $T_{пн}(i, j) = T_{поздн}(j) - t(i, j)$
(1, 2)	6	0	14	6	8
(1, 3)	12	0	12	12	0
(2, 4)	8	6	22	14	14
(3, 4)	10	12	22	22	12
(3, 5)	15	12	36	27	21
(4, 5)	14	22	36	36	22

Таблица 3

Работа (i, j)	Время работы $t(i, j)$	Полный резерв работы $R_п(i, j) = T_{поздн}(j) - T_{ран}(i) - t(i, j)$	Свободный резерв работы $R_с(i, j) = T_{ран}(j) - T_{поздн}(i) - t(i, j)$
(1, 2)	6	14 – 0 – 6 = 8	6 – 0 –6 = 0
(1, 3)	12	12 – 0 – 12 = 0	12 – 0 – 12 = 0
(2, 4)	8	22 – 6 – 8 = 8	22 – 14 – 8 = 0
(3, 4)	10	22 – 12 – 10 = 0	22 – 12 – 10 = 0
(3, 5)	15	36 – 12 – 15 = 9	36 – 12 – 15 = 9
(4, 5)	14	36 –22 – 14 = 0	36 –22 – 14 = 0

Выводы:

Критический путь: 1–3–4–5. Критическое время 36, т.е. на выполнение проекта потребуется не менее 36 ед. времени.

Лишь событие 2 имеет ненулевой резерв времени в 8 единиц. Остальные события имеют нулевые резервы времени, так как они входят в критический путь.

Критические работы (принадлежащие критическому пути): (1, 3), (3, 4), (4, 5). Полные и свободные резервы времени на критические работы равны нулю.

Некритические работы: (1, 2), (2, 4) и (3, 5). Их полные резервы соответственно составляют $R_п(1, 2) = 8$, $R_п(2, 4) = 8$ и $R_п(3, 5) = 9$ ед. времени. Однако это не означает, что все эти работы можно задержать на указанные промежутки времени. Например, если работу (1, 2) выполнить с задержкой в 8 ед. времени, то работу (2, 4) уже нельзя будет задерживать!

Свободные резервы работ: $R_c(3, 5) = 9$ ед.   Можно увеличить продолжительность работы (3, 5) или отсрочить её начало, при этом резервы времени остальных работ не изменятся.

Задание. Провести анализ сетевого графика на рис.1 при a = N, где N – номер фамилии студента в списке группы.

Лабораторная работа № 2
«МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ»

Цель работы: изучение методов моделирования одноканальной системы массового обслуживания в Excel.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 2. Оценить с помощью моделирования вероятность отказа одноканальной СМО с отказами, в которой время между поступлением очередной заявки имеет закон распределения

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0 \\ 1 - 2^{-t}, \text{ если } t \geq 0 \end{cases}$$

а время обслуживания распределено по закону

$$G(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+t^3}, \text{ если } t \geq 0 \end{cases}$$

Решение. Найдем обратную функцию для $F(t)$:

$$y = 1 - 2^{-t} \Rightarrow 2^{-t} = 1 - y \Rightarrow t = -\log_2(1-y), \quad t = \log_2 \frac{1}{1-y}$$

Найдем обратную функцию для $G(t)$:

$$z = 1 - \frac{1}{1+t^3} \Rightarrow \frac{1}{1+t^3} = 1 - z \Rightarrow 1 + t^3 = \frac{1}{1-z} \Rightarrow t^3 = \frac{1}{1-z} - 1, \quad t = \left(\frac{1}{1-z} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$$

Теперь можем записать алгоритм решения задачи.

1. Введите исходные данные и обозначения в диапазоне A1:E2, как показано на рис.2.

	A	B	C	D	E
1	Моделирование одноканальной СМО с отказами				
2	n	T	Tzan	Обслужена	Тобсл
3	1	0,0000	2,0130	1	2,0130
4	2	2,7915	3,6904	1	0,8989
5	3	4,9484	6,7554	1	1,8070
6	4	8,7203	10,3241	1	1,6038
7	5	8,7371	10,3241	0	0,0000
8	6	9,0142	10,3241	0	0,0000
9	7	11,3620	12,1498	1	0,7878
10	8	11,9134	12,1498	0	0,0000
11	9	15,7124	16,4616	1	0,7492
12	10	16,6361	33,4546	1	16,8185

Рис.2

2. В ячейку A3 введите число 1, а в ячейку A4 — формулу =A3+1. Выделите ячейку A3 и маркером заполнения протяните вниз до ячейки A102 (до значения 100, т.е. мы проведем 100 испытаний — в систему поступит 100 заявок).

3. В ячейку B3 введите число 0, а в ячейку B4 — формулу =B3+LOG((1/(1-СЛЧИС()));2) Выделите ячейку B4 и маркером заполнения протяните вниз до ячейки B102.

Мы получим моменты времени поступлений заявок, причем отсчет ведется с момента поступления первой заявки.

4. В ячейку C3 введите формулу =(1/(1-СЛЧИС())-1)^(1/3),

а в ячейку C4 — формулу =ЕСЛИ(B4<C3;C3;B4+(1/(1-СЛЧИС())-1)^(1/3)).

Выделите ячейку C4 и маркером заполнения протяните вниз до ячейки C102. Этот столбец вычисляет моменты времени, до которых система занята обслуживанием заявок. Если в момент времени поступления очередной заявки система еще занята, то данная заявка не обслуживается.

5. В ячейку D3 введите число 1, а в ячейку D4 — формулу =ЕСЛИ(B4>=C3;1;0).

Выделите ячейку D4 и маркером заполнения протяните вниз до ячейки D102.

В этом столбце подсчитывается число обслуженных заявок.

6. В ячейку E3 введите формулу =C3-B3, а в ячейку E4 — формулу =ЕСЛИ(D4>0;C4-B4;0).

Выделите ячейку E4 и маркером заполнения протяните вниз до ячейки E102.

В этом столбце учитывается время обслуживания заявок.

7. Вычислим относительные частоты обслуживания и отказов. Относительная частота обслуживания должна совпадать приближенно с вероятностью обслуживания, а относительная частота отказов — с вероятностью отказа. Также оценкой вероятности обслуживания может служить и отношение времени незанятости системы к общему времени работы.

Объедините ячейки A103:C103, A104:C104, A105:C105, A106:C106, A107:C107, A109:C109, A110:C110 и введите тексты, как на рис. 3.

	A	B	C	D	E
103	Число поступивших заявок			100	
104	число обслуженных заявок:			53	
105	число отказов:			47	
106	Суммарное время занятости СМО:			65,768641	
107	Суммарное время работы СМО:			138,277709	
108				По числу отказов	По времени обслуживания
109	Вероятность обслуживания:			0,53	0,524372788
110	Вероятность отказа:			0,47	0,475627212

Рис. 3

Введите в столбцах D103:D110 и E109:E110 введите формулы, указанные на рис.4.

	D	E
103	=A102	
104	=СУММ(D3:D102)	
105	=D103-D104	
106	=СУММ(E3:E102)	
107	=B102	
108	По числу отказов	По времени обслуживания
109	=D104/A102	=(D107-D106)/D107
110	=1-D109	=1-E109

Рис.4

На рис.3 показаны результаты вычислений. Оценка вероятности того, что заявка будет обслужена, равна 0,53 (относительная частота обслуживания). По времени обслуживания эта вероятность оценивается отношением времени незанятости системы к общему времени работы системы, которое равно числу 0,524.

Таблица 4

№ варианта	*a*	λ	μ	№ варианта	*a*	λ	μ	№ варианта	*a*	λ	μ	№ варианта	*a*	λ	μ
1	2	1	1	8	3	2	1	15	4	3	1	22	4	4	1

2	2	1	2	9	3	2	2	16	4	3	2	23	4	4	2
3	2	1	3	10	3	2	3	17	4	3	3	24	4	4	3
4	2	1	4	11	3	2	4	18	4	3	4	25	4	3	4
5	2	1	5	12	3	2	5	19	4	3	5	26	4	3	5
6	2	1	6	13	3	2	6	20	4	3	6	27	4	3	6
7	2	1	7	14	3	2	7	21	4	3	7	28	4	3	7

Задание. Оценить с помощью моделирования вероятность отказа одноканальной СМО с отказами, в которой время между поступлением очередной заявки имеет закон распределения

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0 \\ 1 - a^{-\lambda t}, \text{ если } t \ge 0 \end{cases}$$

а время обслуживания распределено по закону

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t < 0 \\ 1 - a^{-\mu t}, \text{ если } t \ge 0 \end{cases}$$

Варианты значений параметров: a — число букв в имени студента, λ — число букв в отчестве студента, μ — число букв в его фамилии.

Лабораторная работа № 3
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА»

Цель работы: изучение методов решения задачи коммивояжера в Matlab.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача 3. Матрица расстояний между вершинами задана таблицей 4. Найти оптимальный маршрут коммивояжёра при $n = 0$, удовлетворяющий условиям:

1) сумма пройденных расстояний минимальна, 2) каждый пункт посещается единственный раз.

Таблица 4

Номер вершины i	Номер вершины j				
	1	2	3	4	5
1	–	$5 + n$	7	6	4
2	9	–	6	10	8
3	7	12	–	5	6
4	7	4	10	–	12
5	15	6	9	7	–

Решение. Искомое решение представим в виде матрицы $\{x_{ij}\}$, где $x_{ij} = 1$, если путь из i-го пункта в j-й пункт входит в оптимальный маршрут, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Тогда задача коммивояжера сводится к булевой задаче линейного программирования:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } i = 1,\dots, m; \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ для } j = 1,\dots, m$$

Представим матрицу расстояний вектор- столбцом f из 20 элементов, в котором записаны построчно ненулевые элементы (по 4 элемента из строки) матрицы. Тогда и решение есть вектор-столбец *x* из 20 булевых значений, а задача (1) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{20} f_k x_k \to \min, \quad \sum_{k=1}^{20} a_{mk} x_k = 1 \text{ для } m = 1,\ldots, 10$$

Решение при помощи функции intlinprog в Matlab (Версии после 2014 года):

```
f = [5; 7; 6; 4; 9; 6; 10; 8; 7; 12; 5; 6; 7; 4; 10; 12; 15; 6; 9; 7];
A = [1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1;
     0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0;
     1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0;
     0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0;
     0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1;
     0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0];
b = ones(10,1);
intcon = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20];
lb =zeros(20,1); ub=ones(20,1);
[x,fval]= intlinprog(f,intcon, [ ], [ ], A, b,lb,ub);
x
fval
x =
0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1      (будет выведен столбец)
fval =
       28
```

Восстановим из вектора x матрицу решений, вставляя пропущенные пустые элементы:

	1	***2***	***3***	***4***	***5***
1	-	0	0	0	1
2	0	-	1	0	0
3	1	0	-	0	0
4	0	1	0	-	0
5	0	0	0	1	-

Таким образом, как следует из полученных результатов, оптимальным маршрутом коммивояжёра будет 1→5→4→2→3→1, а длина маршрута равна 28.

Задание. Найти решение Задачаа 3 (табл. 4), где *n* – номер фамилии студента в списке группы.

Лабораторная работа № 4
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВА»

Цель работы: изучение методов решения задач дискретной математики в Matlab.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача о покрытии множества формулируется следующим образом.

Пусть $M = \{h_1, \ldots, h_m\}$ – некоторое множество объектов h_i ($i = 1,\ldots, m$), а $S = \{S_1, \ldots, S_n\}$ – семейство подмножеств S_j ($j = 1,\ldots,n$), содержащих элементы множества *M*, и каждому из этих подмножеств поставлено в соответствие некоторое число (вес) c_j. Требуется найти такой набор подмножеств $S^* \subset S$, при котором достигается покрытие множества M с минимальным суммарным весом.

Сформулируем данную задачу в терминах булевого линейного программирования.

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ – булева матрица размерности $m \times n$, элементы которой формируются исходя из условия: $a_{ij} = 1$, если $h_i \in S_j$ (т.е. если i-ый элемент множества M содержится в подмножестве S_j), и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Пусть x_j – булева переменная, которая равна 1, если подмножество S_j входит в покрытие множества M, и равна 0 в противном случае. Тогда задача о покрытии множества имеет вид:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j >= 1, \ i = 1,\dots, m$$

Задача 4. Для множества M = {1,2,3,4,5,6,7,8} имеет место система подмножеств S: S_1 = {1,3,4,5}; S_2 = {5,7,8}; S_3 = {5,6,8}; S_4 = {1,2,3,7}; S_5 = {2,3,5,6,7} ; S_6 = {1,5,8}; S_7 = {1,3,4,8}; S_8 = {2,4,6,7}; S_9 = {1,3,7}; S_{10} = {2,6,7}; S_{11} = {1,2,3,5,8}; S_{12} = {1,2,5,6}; S_{13} = {1,2,3,5,8} с весами c_1 =7; c_2 =8; c_3 =7; c_4 =9; c_5 =7; c_6 =4; c_7 =5; c_8 =6; c_9 =9; c_{10} =9; c_{11} =5; c_{12}=10; c_{13}=5. Найти покрытие множества M с минимальным суммарным весом.

Решение при помощи функции intlinprog в Matlab (Версии после 2014 года):

```
f = [7; 8; 7; 9; 7; 4; 5; 6; 9; 9; 5; 10; 5];
A = [1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 1;
     0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1;
     1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1;
     1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0;
     1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1;
     0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0;
     0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0;
     0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1];
b = ones(8,1);
intcon = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13];
lb =zeros(13,1); ub=ones(13,1);
[x,fval]= intlinprog(f,intcon, -A, -b, [ ], [ ], lb, ub);
x
fval
```

В результате вычислений получится вектор оптимальных значений булевых переменных и оптимальное значение целевой функции:

x =

0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 (на экран будет выведен столбец)

fval = 11.

Таким образом, минимальное покрытие множества M образуют подмножества S_8 и S_{13} с суммарным весом, равным 11.

Задание. Решить задачу Задачаа 4, самостоятельно изменив множества $S_1, \dots, S_{13}$.

Лабораторная работа № 5
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПАРОСОЧЕТАНИИ (МАКСИМАЛЬНОМ РЁБЕРНОМ ПОКРЫТИИ)»

Цель работы: изучение методов решения задач дискретной математики в Matlab.

Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача о максимальном паросочетании (максимальном рёберном покрытии) формулируется следующим образом: для заданного неориентированного графа найти такое подмножество E^* рёбер из всего их множества E ($E^* \subset E$) максимальной мощности, в котором никакие два ребра не будут инцидентны (т.е. не будут иметь общей вершины). В терминах булевого линейного программирования задача формулируется следующим образом:

$$f = \sum_{j=1}^{n} x_j \to \max, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j <= 1, \ i = 1,\ldots, m$$

Здесь x_j – переменные, ассоциированные с рёбрами, при этом $x_j = 1$, если ребро с номером j входит в максимальное паросочетание, и $x_j = 0$ в противоположном случае.

Коэффициенты a_{ij} – компоненты булевой матрицы инцидентности A размерности $m \times n$ – принимают значение 1, если вершина с номером i инцидентна ребру с номером j, и значение 0 – в противоположном случае.

Ограничение в виде системы линейных неравенств – задаёт условие того, что в каждой вершине сумма инцидентных ей переменных (рёбер) не превышает единицы.

Задача о максимальном *взвешенном* паросочетании отличается только целевой функцией, которая имеет вид $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$, где c_j – вес ребра с номером j.

Задача 5. Решить задачу о максимальном (невзвешенном) паросочетании для графа, изображённого на рис. 5.

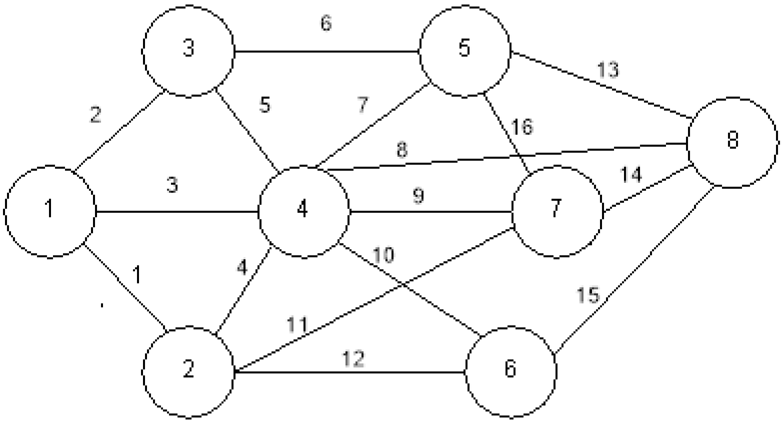


Рис. 5

Решение.

В этом случае Matlab-код для решения данной задачи имеет вид

```
f = ones(16,1);
A = [1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0;
     0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1;
     0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0];
b = ones(8,1);
intcon = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16];
lb =zeros(16,1); ub=ones(16,1);
[x,fval]= intlinprog(f,intcon, [ ], [ ], A, b, lb, ub);
x
fval
x =
  1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1  (на экран будет выведен столбец)

fval =
  4
```

Таким образом, $E^* = \{1,5,15,16\}$, т.е. в максимальное паросочетание входят рёбра с номерами 1, 5, 15, 16, что показано на рис. 6 (рёбра, входящие в паросочетание, выделены жирной линией). Значение целевой функции fval = 4 показывает количество ребер в паросочетании.

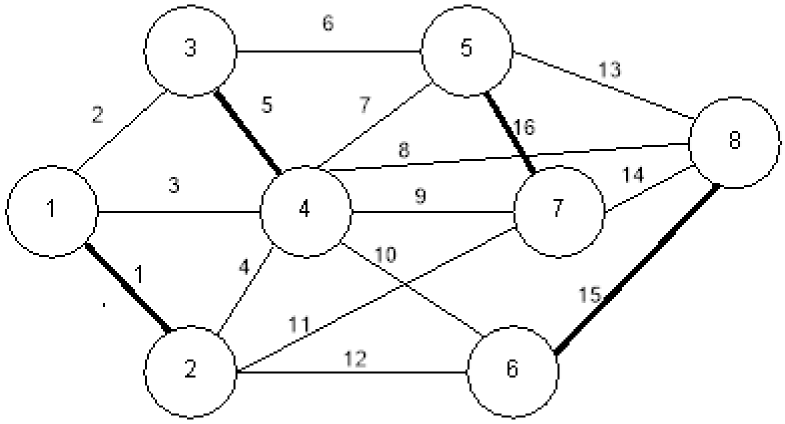


Рис.6

Задание. Решить задачу о максимальном взвешенном паросочетании для графа. Значения весов рёбер c_j взять произвольные от 1 до 5 (значения весов могут повторяться).

Лабораторная работа № 6
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ВЕРШИННОМ ПОКРЫТИИ»

Цель работы: изучение методов решения задач дискретной математики в Matlab.
Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:

Задача о минимальном вершинном покрытии формулируется следующим образом: для заданного неориентированного графа требуется найти такое подмножество V^* вершин из всего их множества $V\,(V^* \subset V)$ минимальной мощности, которые были бы инцидентны всем рёбрам графа.

В терминах булевого линейного программирования задача формулируется следующим образом:

$$f = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min,\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j >= 1\ ,\ j = 1,\ldots,n$$

Здесь x_i – переменные, ассоциированные с вершинами, при этом $x_i = 1$, если вершина с номером i входит в минимальное вершинное покрытие, и $x_i = 0$ в противоположном случае.

Коэффициенты a_{ji} – компоненты булевой матрицы инцидентности А размерности $n{\times}m$ – принимают значение 1, если ребро с номером j инцидентно вершине с номером i, и значение 0 – в противоположном случае.

Ограничение в виде системы линейных неравенств – задаёт условие того, что каждому ребру инцидентна хотя бы одна вершина, т.е. сумма вершин, инцидентных каждому ребру, не меньше единицы.

Задача о минимальном *взвешенном* вершинном покрытии отличается только целевой функцией $f = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \min$, где c_i – вес вершины с номером i. Следует отметить, что данная задача является двойственной по отношению к задаче о максимальном паросочетании.

Задача 6. Решить задачу о минимальном вершинном покрытии для графа, изображённого на рис. 7.

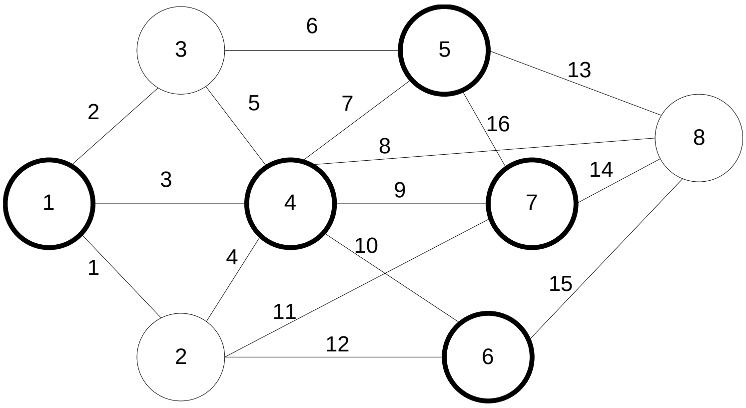


Рис.7

Решение в Matlab имеет вид

```
clear all
clc
f = ones(8,1);
A = [1 1 0 0 0 0 0 0;
     1 0 1 0 0 0 0 0;
     1 0 0 1 0 0 0 0;
     0 1 0 1 0 0 0 0;
     0 0 1 1 0 0 0 0;
     0 0 1 0 1 0 0 0;
     0 0 0 1 1 0 0 0;
     0 0 0 1 0 0 0 1;
     0 0 0 1 0 0 1 0;
     0 0 0 1 0 1 0 0;
     0 1 0 0 0 0 1 0;
     0 1 0 0 0 1 0 0;
     0 0 0 0 1 0 0 1;
     0 0 0 0 0 0 1 1;
     0 0 0 0 0 1 0 1;
     0 0 0 0 1 0 1 0];
b = ones(16,1);
intcon = [1,2,3,4,5,6,7,8];
lb =zeros(8,1); ub =ones(8,1);
[x,fval]= intlinprog(f,intcon,  -A, -b,[ ], [ ], lb, ub);
x
fval
```

В результате вычислений получится вектор значений булевых переменных:

x =   1   0   0   1   1   1   1   0.

Таким образом, V^* = {1,4,5,6,7}, т.е. в минимальное покрытие входят вершины с номерами 1,4,5,6,7, что показано на рис. 4 (вершины, входящие в покрытие, выделены жирным).

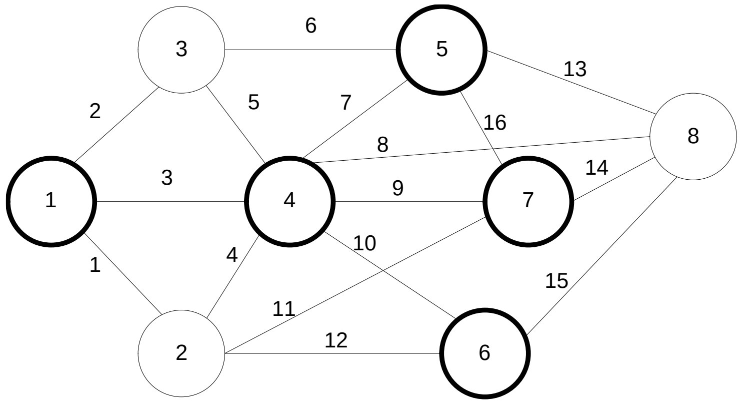


Рис. 8

Задание. Решить задачу о минимальном взвешенном вершинном покрытии для графа. Значения весов вершин для различных вариантов выполнения задания придумать самостоятельно.

Лабораторная работа № 7
«ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ПАКЕТЕ MATLAB»

Цель работы: изучение методов решения задач дискретной математики в Matlab.
Форма отчета: демонстрация выполненного задания преподавателю.

Методические указания:
Задача 7. Вычислить сумму при x = 2,546899 сумму, применяя параллельные вычисления

$$S=\sum_{k=1}^{1000000}\frac{k^x+\cos(k+1)}{2+e^{3k}+\sin(kx)}$$

Решение. Составим программу вычисления суммы:

```
clear all
clc
x = 2.546899;
S = 0;
tic;
for k = 1:10000000
   S = S + (k^x+cos(k+1))/(exp(3*k)+sin(k*x));
end
time = toc;
S
time
```

В результате выполнения программы получим:

```
S =
   0.042
time =
      6.5029
```

Сумма S = 0.042 вычислена за время time = 6.5029 секунд.
Заменим в программе инструкцию for на parfor:

```
clear all
clc
x = 2.546899;
```

```
S = 0;
tic;
parfor k = 1:10000000
   S = S + (k^x+cos(k+1))/(exp(3*k)+sin(k*x));
end
time = toc;
S
Time
```

Запустив программу на счет, получим сведения о ом, что запущен процесс распараллеливания вычислений и результаты вычислений:

```
Starting parallel pool (parpool) using the 'local' profile ...
Connected to the parallel pool (number of workers: 2).
S =
   0.0425
time =
  30.4351
```

Вывод: Запущены параллельные вычисления. (Число исполнителей: 2)

На данном компьютере двухъядерный процессор Intel Gore i3.

Время выполнения time = 30.4351 секунд затрачено на создание пула параллельных исполнителей и их выполнение.

Выполнив программу еще раз, получим:

```
S =
   0.0425
time =
   4.0930
```

Время вычисления суммы при простом цикле for равно 6.5029 сек, а при использовании цикла с распараллеливанием parfor составляет 4.0930 сек.

Задание для самостоятельной работы.

Придумать аналогичные примеры вычисления на своих компьютерах и объяснить результаты.

.

Лабораторная работа № 8
«ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В МАТЕМАТИКЕ»

Цель работы: изучение методов решения математических задач.

Форма отчета: реферат.

Задание. Изучить по источникам в интернете применение параллельных вычислений в различных областях науки. Составить реферат на 5-10 страниц.

Примерная тематика рефератов:

1. Компьютерные системы поддержки параллельных вычислений.
2. Классификация параллельных вычислений.
3. Параллельные вычисления и большие данные (Big Data).
4. Параллельные вычисления на персональном компьютере.
5. Программное обеспечение поддержки параллельных вычислений.

6. Обзор пакетов программ поддержки параллельных вычислений.
7. и т.п.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Алексинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели". Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.
2. Соболь Б.В и др. Практикум по статистике в Excel. Ростов-на-Дону. «Феникс», -2010, -340с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Место дисциплины в ООП

Дисциплина «Алгебра и аналитическая геометрия» в подготовке бакалавров направления 09.03.02 является одной и основных, на которых строится естественнонаучная и профессиональная подготовка будущих специалистов, способных выполнять все виды профессиональной деятельности, предусмотренные ФГОС ВО направления 09.03.02, формирование математической составляющей общекультурных и профессиональных компетенций. Профессиональный уровень подготовки бакалавров в значительной мере определяется освоением современного математического аппарата, владением инструментарием для исследования и решения профессиональных задач. Поэтому изучение дисциплины «Алгебра и аналитическая геометрия» занимает значительное место в ООП и служит фундаментальной базой образования бакалавров.

Методические рекомендации студентам по изучению дисциплины

Дисциплина включает основные разделы высшей математики:

- Линейная алгебра
- Векторная алгебра и аналитическая геометрия

В рабочей программе дисциплины помещен список рекомендуемой литературы (раздел 6), тематический план и содержание дисциплины (раздел 3.1), оформленный в виде таблицы. В таблице перечислены разделы курса, ориентировочное время на их усвоение и приведены ссылки на основные литературные источники. При изучении каждого раздела рекомендуется использовать материалы УМКД и указанные литературные источники.

Для проверки результатов усвоения нужно использовать Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации и самоконтроля по итогам освоения дисциплины (раздел 5 рабочей программы).

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Для целенаправленного и эффективного формирования запланированных компетенций при изучении дисциплины предусмотрены следующие образовательные технологии:

1. Информационно-коммуникативные технологии, позволяющие овладевать и свободно оперировать большим запасом знаний путем самостоятельного изучения профессиональной литературы, применения новых информационных технологий, включая использование технических и электронных средств получения информации.
2. Проблемно-ориентированные технологии, направленные на формирование и развитие проблемного мышления, мыслительной активности, способности видеть и формулировать проблемы, выбирать средства для их решения.
3. Практико-ориентированные технологии, направленные на формирование системы профессиональных практических умений и навыков, позволяющих качественно осуществлять профессиональную деятельность.
4. Личностно-ориентированные технологии, обеспечивающие в ходе учебного процесса учет различных способностей обучаемых, создание необходимых условий для развития их индивидуальных способностей, развитие активности личности учебном процессе.
5. Здоровьесберегающие технологии, позволяющие равномерно во время занятия распределять различные виды заданий, определять время подачи сложного учебного материала, выделять время на проведение самостоятельных работ.

Для реализации указанных технологий используются следующие сочетания методов и форм организации обучения:

- Лекционная система обучения;
- Информационно-коммуникационные технологии
- Проектные методы обучения
- Исследовательские методы в обучении
- Проблемное обучение

Программа дисциплины предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (компьютерные симуляции, разбор конкретных ситуаций, работа над проектами) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся. Эффективность применения интерактивных форм обучения обеспечивается реализацией следующих условий:

- создание диалогического пространства в организации учебного процесса;
- использование принципов социально-психологического обучения в учебной и научной деятельности;
- формирование психологической готовности преподавателей к использованию интерактивных форм обучения, направленных на развитие внутренней активности студентов.

Методы	Формы организации обучения	
Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
IT- методы	+	
Дискуссия	+	+
Работа в команде	+	+
Методы проблемного обучения	+	+
Индивидуальное обучение	+	
Исследовательские методы	+	

IT – методы.

Основой поддержки процесса образования являются современные информационные технологии, которые имеют следующие преимущества: наглядность, возможность использования комбинированных форм представления информации - графическое изображение, анимация, обработка и хранение больших объемов информации, доступ к мировым информационным ресурсам.

IT – технологии способствуют развитию творческих способностей учащихся, обучению новым профессиональным навыкам и умениям, развитию логического мышления, усилению роли самостоятельной работы обучаемого.

При изучении учебной дисциплины применяются следующие направления использования информационных технологий:

- компьютерные программы и обучающие системы;

- тестовые системы, предназначенные для диагностирования, оценивания и проверки знаний, способностей и умений;

- лабораторные комплексы, в основе которых лежат моделирующие программы, предоставляющие в распоряжение обучаемого возможности использования - математической модели для исследования определенной реальности;

- базы данных и базы знаний по различным областям, обеспечивающие доступ к накопленным знаниям (Библиотека ГОСТов и нормативных документов. http://libgost.ru, Федеральный портал. Каталог образовательных Интернет-ресурсов.

http://www.edu.ru/index.php, Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Образование в области техники и технологий http://window.edu.ru/);

- прикладные и инструментальные программные средства, обеспечивающие выполнение конкретных учебных операций (обработку текстов, составление таблиц, редактирование графической информации и др.).

- системы на базе мультимедиа-технологии, построенные с применением видеотехники, накопителей на CD-ROM.

Положительным при использовании информационных технологий в образовании является повышение качества обучения за счет:

- большей адаптации обучаемого к учебному материалу с учетом собственных возможностей и способностей;

- возможности выбора более подходящего для обучаемого метода усвоения предмета;

- регулирования интенсивности обучения на различных этапах учебного процесса;

самоконтроля;

- доступа к ранее недосягаемым образовательным ресурсам российского и мирового уровня;

- поддержки активных методов обучения;

- образной наглядной формы представления изучаемого материала;

- модульного принципа построения, позволяющего тиражировать отдельные составные части информационной технологии;

- развития самостоятельного обучения.

Дискуссия

При проведении лабораторных и практических занятий по дисциплине используется такая образовательная технология, как дискуссия, то есть коллективное обсуждение какой-либо проблемы или круга вопросов с целью нахождения правильного ответа. Такой способ организации совместной деятельности позволяет интенсифицировать эффективность учебного процесса за счет активного включения обучаемых в коллективный поиск истины, а также сопоставления информации, идей, мнений, предложений.

Тема дискуссии объявляется преподавателем заранее. Студенты изучают соответствующую литературу, получают необходимую информацию, в том числе с использованием IT – методов. В ходе дискуссии каждый студент имеет право высказать свою точку зрения. Дискуссия формирует умение рассуждать, доказывать, формулировать проблему и т.п.

В ходе дискуссии необходимо договариваться об общем понимании терминов, а также общем понимании темы или проблемы. При этом дискуссии могут преследовать разные цели - обсуждение проблемы, достижение согласия, прояснение позиций, углубление понимания вопроса, нахождение различных вариантов решения и видение этой вариативности, развитие умений занимать и отстаивать свою точку зрения, улучшение навыков активного слушания. Необходимо, чтобы у участников было достаточно материалов для обсуждения проблемы.

Обстановка в процессе проведения дискуссии должна быть непринужденной, студенты раскованными, мнение каждого считается ценным и обсуждается. Можно высказывать любые предположения, в том числе парадоксальные и нереальные.

Способы вовлечения в дискуссию:

1. Положительный климат в группе (уважительное отношение друг к другу).

2. Демократические нормы обсуждения, запрещение оскорбительных выпадов.

3. Подготовка студентов к обсуждению – изучение информации по обсуждаемой теме, время на формирование вопросов и точек зрения («репетиция размышлений»).

4. Обучение навыкам приглашения к обсуждению и предотвращению доминирования при обсуждении.

5. Необходимо предоставлять достаточное количество времени.

7. Обсуждать дискуссию после ее окончания.

Работа в команде

Работа в команде предполагает как самостоятельность мышления включенных в нее студентов, так и вовлеченность студентов в общую работу для решения поставленных перед командой задач.

На кафедре практикуется такая форма работы в команде, как проведение зачетных занятий по циклам лабораторного практикума, теоретического курса и других контрольных мероприятий в игровой форме. При этом появляется мощный социальный стимул – зависимость общей успеваемости команды студентов от уровня знаний каждого ее члена.

Игровое занятие целесообразно проводить:

1) в конце цикла лабораторных работ для допуска к экзамену; в этом случае тематика вопросов из общего списка должна соответствовать перечню лабораторных работ, предусмотренных учебным планом;

2) в качестве недифференцированной формы рейтинг-контроля;

3) как зачет по всему курсу или каким-то его разделам.

Методы проблемного обучения

Под проблемным обучением понимается система научно обоснованных методов и средств, применяемая в процессе развивающего обучения, которая предполагает создание под руководством преподавателя проблемных ситуаций и активную самостоятельную деятельность учащихся по их разрешению с целью, в первую очередь, интеллектуального и творческого развития учащихся, а также овладения ими знаниями, навыками, умениями и способами познания. Проблемное обучение обеспечивает возможности творческого участия обучаемых в процессе освоения новых знаний, формирование познавательных интересов и творческого мышления, высокую степень органичного усвоения знаний и мотивации учащихся.

Проблемное обучение можно отнести к личностно-ориентированным концепциям, так как оно применяется для того, чтобы у студентов развивалось творческое мышление, интеллект.

Основой для этого является моделирование реального творческого процесса за счет создания проблемной ситуации и управления поиском решения проблемы. При этом осознание, принятие и разрешение этих проблемных ситуаций происходит при оптимальной самостоятельности учащихся, но под общим направляющим руководством педагога в ходе совместного взаимодействия.

Проблемное обучение используется при выполнении рефератов, индивидуальных заданий, тематика и содержание которых отвечает всем принципам проблемного обучения.

При таком обучении существенно усиливается роль самостоятельного образования, инициативность. Самостоятельный поиск решения проблемной ситуации развивает чувство ответственности, повышает самомотивацию, волю учащихся. Кроме того, в процессе проблемного обучения предполагается, что учащиеся будут самостоятельно выбирать и обрабатывать самые разные источники информации, в том числе и те, с которыми они будут работать в последующем, и обращаться к этим источникам им приходится чаще, чем тем, кто обучается по традиционной программе. Групповая организация работы учащихся в процессе проблемного обучения приводит к укреплению межличностных отношений, развивает взаимодействие в учебном микросоциуме: решение проблемных задач производится, как правило, в группах небольшого и среднего размера.

В случае применения группового метода проблемного обучения учащиеся получают навыки коллегиального решения рабочих проблем.

Чрезвычайно важной функцией проблемного обучения можно назвать и повышение мотивации учащихся. Как говорил еще Г.Галилей, «вы не в состоянии научить человека чему-либо. Вы можете лишь помочь ему обнаружить это внутри себя». Без мотивации учебная деятельность, как и любая другая, практически невозможна. В традиционной системе преподавания мотивация осуществляется известным методом кнута и пряника или же основные усилия педагога по мотивации учащихся направлены на объяснение важности обучения для будущей деятельности учащихся, что также не всегда эффективно. В ненаучной сфере такой подход получил название «знание – силой». Без обратной положительной реакции учащихся учебный процесс или теряет свою эффективность, или приводит к значительному утомлению учащихся, их эмоциональным перегрузкам. В этом отношении проблемное обучение имеет более выигрышное положение, так как его характеризует творческая, а не репродуктивная деятельность учащихся, студенты получают больше возможности самореализоваться в процессе обучения, постоянная постановка и решение проблемных задач является более приемлемой для поддержания неослабевающего интереса и активности учащихся.

Индивидуальное обучение

Индивидуальное обучение — это целостный процесс, обеспечивающий поступательное развитие творческого потенциала личности и всестороннее обогащение ее духовного мира. Он состоит из последовательно возвышающихся ступеней специально организованной учебы, дающих человеку благоприятные для него изменения социального статуса.

В центре внимания идеи индивидуального обучения находится студент, его личность, желания и способности, разностороннему развитию которых уделяется основное внимание.

Роль преподавателя сводится к доходчивому преподнесению познавательной информации, содержание которой ориентируется на опережение развития общества, профессиональной карьеры, личных навыков и качеств студентов, и других сфер социальной практики. Помимо самих знаний, умений, навыков в содержание индивидуального обучения входит сам процесс, опыт их приобретения и практического применения, пути и способы самостоятельного добывания, поиска и открытия, самообразования — "личностный опыт" как компонент содержания образования.

В результате реализации индивидуального обучения преподаватель стремится получить развивающуюся личность, подготовленную к универсальной деятельности, имеющую сформированные познавательные запросы и духовные потребности, способную самостоятельно планировать и реализовать свои цели.

Исследовательские методы

Научно-исследовательская работа - это вид самостоятельной аналитической деятельности обучающихся в области систематизированного изучения какого-либо вопроса или актуальной проблемы, выходящих за рамки учебного процесса. Такая работа способствует созданию общенаучного фундамента и выработке исследовательских навыков. Основная идея исследовательского метода заключается в использовании научного подхода к решению той или иной учебной задачи.

Использование исследовательского метода подразумевает следующие этапы организации учебной деятельности: определение общей темы исследования, предмета и объекта исследования; выявление и формулирование общей проблемы; формулировку гипотез; определение методов сбора и обработки данных в подтверждение выдвинутых гипотез; сбор данных; обсуждение полученных данных; проверку гипотез; формулировку понятий, обобщений, выводов; применение заключений, выводов.

Участвуя в научно-исследовательской работе, студенты усваивают готовые формы социальной жизни, приобретают собственный социальный опыт, занимают активную жизненную позицию, которая помогает добиться позитивной самореализации. Полученные в процессе творческой деятельности навыки и умения позволят учащимся чувствовать себя приобщенными к культуре и науке, способными активно проявлять себя на рынке труда, свободно распоряжаться образовательным капиталом. Достоинством исследовательского метода организации учебной деятельности является привитие учащимся навыка сотрудничества. Участники исследовательской деятельности не замыкаются на личностных интересах, учатся видеть проблемы и интересы своих партнеров и понимать, что результаты их исследований будут использованы для анализа полученных данных и формулирования выводов.

Проведение научного исследования с обучающимися имеет следующие цели:

• приобщить их к процессу выработки новых знаний;

• освоить один из нестандартных видов познавательной деятельности;

• научить пользоваться нормативной, учебной, монографической литературой, практическими материалами, статистическими данными, информационной системой Интернет;

• выработать умение работать с основными компьютерными программами;

• предоставить возможность выступить публично, провести полемику, донести до слушателей свою точку зрения, обосновать ее, склонить аудиторию к разделению своих идей.

Исследовательская деятельность под руководством педагога позволяет обучающимся:

• овладеть существенными научными понятиями, представлениями;

• самостоятельно определить проблемные ситуации, найти пути для их разрешения;

• точно описать факты, явления с применением общепризнанной технологии;

• приобрести навык подбора фактов по их существенным признакам;

• сгруппировать факты, признаки в соответствии с общенаучными правилами;

• проанализировать факты и явления, вычленить из них общее и единое, случайное и закономерное;

• выстроить доказательство и давать опровержение.

При написании исследовательской работы у молодых людей развиваются умения:

• анализировать, систематизировать (анализ - это способ познания объекта посредством изучения его частей и свойств);

• сравнивать (сравнение - это способ познания посредством установления сходства и различия);

• обобщать и классифицировать (обобщение - это способ познания посредством определения общих существенных признаков); • определять понятия (понятие - это слово или словосочетание, обозначающее отдельный объект или совокупность объектов и их существенные признаки);

• доказывать и опровергать (доказательство - это рассуждение, устанавливающее истинность какого-либо утверждения путем приведения ранее доказанных утверждений. Опровержение - это рассуждение, направленное на установление ложности выдвинутого утверждения).

КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

МАТРИЦЫ

1. Определение матриц

Прямоугольная ***таблица***, содержащая m строк и n столбцов, называется матрицей размера $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, второй — номер столбца, в котором расположен этот элемент.

Матрицы обозначают буквами A, B, C и т. д. Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или сокращенно в виде $A = \left(a_{ij}\right)$ $\left(i = 1 \dots m; \quad j = 1 \dots n\right)$.

Строки матрицы A можно рассматривать как n-мерные векторы и столбцы матрицы A можно рассматривать как m-мерные векторы.

Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ считаются равными, если число их строк равно числу столбцов и если равны элементы, стоящие на соответствующих местах этих матриц равны, то есть $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$. Матрицы равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие столбцы или равны их соответствующие строки.

Часто приходится рассматривать матрицу, столбцами которой являются строки матрицы A. Эта матрица называется транспонированной к A и обозначается через A^T.

Пусть дана матрица A. Переставим строки со столбцами. Получим матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая будет транспонированной по отношению к матрице A. В частности, при транспонировании вектора-столбца получается вектор-строка и наоборот.

2. Квадратные матрицы

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется квадратной, а число ее строк, равное числу столбцов, — порядком квадратной матрицы.

Множество всех элементов квадратной матрицы, которые лежат на отрезке, соединяющем ее левый верхний угол с правым нижним, т. е. совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mn}$ называется главной диагональю, а множество всех элементов, которые лежат на отрезке, соединяющем ее правый верхний угол с левым нижним, - побочной диагональю.

Квадратная матрица называется треугольной, если ее элементы, которые находятся над главной диагональю или под главной диагональю, равны нулю, т. е. матрицы вида

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

являются треугольными. Матрица B называется треугольной снизу, а матрица C — треугольной сверху.

Квадратная матрица называется диагональной, если ее элементы, которые находятся вне ее главной диагонали, равны 0.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Действия с матрицами

Умножение матрицы на число и сложение матриц

По определению, чтобы умножить матрицу на число k, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

Пример 1. Умножить матрицу на число

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 & -1 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 4 & 0 \\ -5 & 6 & 0 & 11 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 9 & 27 & 18 & -3 \\ 6 & -21 & 3 & 6 \\ 9 & 30 & 12 & 0 \\ -15 & 18 & 0 & 33 \end{pmatrix}$$

Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов. Суммой матриц A и B называется матрица C, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 2. Сумма двух матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 15 & -1 & -35 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой и обозначается через $\boldsymbol{O}$. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ имеем $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$,

2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$,

3) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{l}$,

4) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{l}$,

5) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{k}$.

где $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ - матрицы, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$ - числа.

Произведение матриц

Произведение матрицы $\boldsymbol{A}$ на матрицу $\boldsymbol{B}$ определено только в том случае, когда число столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ равно числу строк матрицы $\boldsymbol{B}$. В результате умножения получим матрицу $\boldsymbol{C}$, у которой столько же строк, как у матрицы $\boldsymbol{A}$, и столько же столбцов, как у матрицы $\boldsymbol{B}$.

По определению элемент $\boldsymbol{c}_{ij}$ матрицы $\boldsymbol{C}$ равен сумме парных произведений элементов $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{ой}$ строки матрицы $\boldsymbol{A}$, на соответствующие элементы $\boldsymbol{j}-\boldsymbol{го}$ столбца матрицы $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{c}_{ik}=\boldsymbol{a}_{i1}\cdot\boldsymbol{b}_{1k}+\boldsymbol{a}_{i2}\cdot\boldsymbol{b}_{2k}+\ldots+\boldsymbol{a}_{im}\cdot\boldsymbol{b}_{mk}=\sum_{s=1}^{m}\boldsymbol{a}_{is}\cdot\boldsymbol{b}_{sk}$$

Пример 3. Найти произведение матриц

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{3}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\quad\text{и}\quad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{3}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{3}&\mathbf{5}&\mathbf{4}\end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем: матрица $\boldsymbol{A}$ размера $\boldsymbol{2\times3}$, матрица $\boldsymbol{B}$ размера $\boldsymbol{3\times3}$, тогда произведение $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ существует и элементы матрицы C равны

$\boldsymbol{c}_{11}=\mathbf{1\cdot1+2\cdot2+1\cdot3=8}$, $\boldsymbol{c}_{21}=\mathbf{3\cdot1+1\cdot2+0\cdot3=5}$,

$\boldsymbol{c}_{12}=\mathbf{1\cdot2+2\cdot0+1\cdot5=7}$ $\boldsymbol{c}_{22}=\mathbf{3\cdot2+1\cdot0+0\cdot5=6}$,

$\boldsymbol{c}_{13}=\mathbf{1\cdot3+2\cdot1+1\cdot4=9}$, $\boldsymbol{c}_{23}=\mathbf{3\cdot3+1\cdot1+0\cdot4=10}$.

$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{8}&\mathbf{7}&\mathbf{9}\\\mathbf{5}&\mathbf{6}&\mathbf{10}\end{pmatrix}$, а произведение $\boldsymbol{BA}$ не существует.

Пример 4. Найти произведение матриц

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{4}&\mathbf{-5}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}&\mathbf{-3}&\mathbf{4}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-2}&\mathbf{3}&\mathbf{1}\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{2}\\\mathbf{4}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 1-5\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 3-5\cdot 0 \\ 1\cdot 3+2\cdot 4-3\cdot 1+4\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 1-3\cdot 3+4\cdot 0 \\ -1\cdot 3-2\cdot 4+3\cdot 1+1\cdot 2 & -1\cdot 2-2\cdot 1+3\cdot 3+1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 19 \\ 16 & -5 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что произведение матриц не обладает перестановочным свойством, т.е. некоммутативно. Если все-таки выполняется равенство $AB = BA$, то матрицы A и B называются перестановочными.

Свойства произведения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot k = (A \cdot k) \cdot B = A \cdot (B \cdot k)$, где k -число;

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы равны 1.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойство единичной матрицы: $E \cdot A = A \cdot E = A$ для любой квадратной матрицы A.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу A, порядка n. Если существует такая матрица B, что $AB = BA = E$, то говорят, что A обратима, а B называют обратной матрицей для матрицы A.

Определитель матрицы

Определителем квадратной матрицы A называется число, которое обозначается через $det(A)$ или $|A|$ и вычисляется при помощи следующих трех правил.

Правило 1. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Замечание: Определитель одноэлементной матрицы равен самому элементу.

Правило 2. Общий множитель элементов любой строки или столбца матрицы можно вынести за знак определителя.

Замечание: Определитель матрицы, у которой строка или столбец состоит только из нулей, равен 0.

Правило 3. Определитель матрицы не изменится, если к одной из строк (столбцов) матрицы прибавить другую строку (столбец) этой матрицы.

Свойства определителя матрицы.

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если в определителе переставить две строки, определитель поменяет знак.
3. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

4. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

5. Если все элементы $\boldsymbol{i-ой}$ строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых $\boldsymbol{a_{ij}=b_j+c_j\,(j=1,\dots n)}$, то определитель равен сумме определителей, у которых все строки, кроме $\boldsymbol{i-ой}$, - такие же, как в заданном определителе, а $\boldsymbol{i-ая}$ строка в одном из слагаемых состоит из элементов $\boldsymbol{b_j}$, в другом - из элементов $\boldsymbol{c_j}$.

Замечание. Все свойства остаются справедливыми, если вместо строк взять столбцы.

Миноры и алгебраические дополнения

Обозначим через $\boldsymbol{A_{ij}}$ матрицу, которая остается при вычеркивании из матрицы $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{i-ой}$ строки и $\boldsymbol{j-го}$ столбца. Тогда $\boldsymbol{det(A_{ij})}$ называется минором элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$. Величина $\boldsymbol{(-1)^{i+j}\,det(A_{ij})}$ называется алгебраическим дополнением элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Разложение определителя матрицы по элементам строки или столбца.

Теорема. Определитель каждой матрицы равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е. при разложении по элементам $\boldsymbol{i-ой}$ строки

$$\boldsymbol{det(A)=(-1)^{i+1}a_{i1}\,det(A_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}\,det(A_{i2})+\dots}$$
$$\boldsymbol{+(-1)^{i+n}a_{in}\,det(A_{in})}$$

Для вычисления значений определителей матриц второго порядка пользуются формулой:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Для вычисления значений определителей матриц третьего порядка можно воспользоваться формулой разложения определителя по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 7. Не вычисляя определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, показать, что он равен нулю.

Решение. Вычтем из второй строки первую, получим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, равный исходному. Если из третьей строки также вычесть первую, то получится определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$, в котором две строки пропорциональны. Такой определитель равен нулю.

Пример 8. Вычислить определитель $D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & 5 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$, разложив его по элементам второго столбца.

Решение. Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$D=a_{12}\cdot A_{12}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{32}\cdot A_{32}=$$

$$=(-2)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-20$$

4. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу A. Если в этой матрице выделить произвольно k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу $k-го$ порядка. Определитель этой матрицы называется ***минором k-го порядка*** матрицы A. Очевидно, что матрица A обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n. Некоторые среди них будут равны нулю. Среди всех отличных от нуля миноров матрицы A найдется, по крайней мере, один минор, порядок которого будет наибольшим. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется ***рангом*** матрицы. Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A имеется отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего чем r, равен нулю. Ранг матрицы A обозначается через $r(A)$. Очевидно, что выполняется соотношение

$$0 \le r(A) \le min(m,n)$$

Ранг матрицы находится либо методом окаймления миноров, либо методом элементарных преобразований. При вычислении ранга матрицы первым способом следует переходить от миноров низших порядков к минорам более высокого порядка. Если уже найден минор D $k-го$ порядка матрицы A, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры $(k+1)-го$ порядка, окаймляющие минор D, т.е. содержащие его в качестве минора. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Элементарными*и называются следующие преобразования матрицы:*

1) *перестановка двух любых строк (или столбцов),*
2) *умножение строки (или столбца) на отличное от нуля число,*
3) *прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число.*

Две матрицы называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но их ранги равны. Если матрицы A и B эквивалентны, то это записывается так: $A\sim B$.

Канонической матрицей называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц (число которых может равняться нулю), а все остальные элементы равны нулю, например,

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к канонической. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

Пример 11. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение. Начинаем с миноров $1-го$ порядка, (т.е. с элементов матрицы A). Выберем, например, минор (элемент) $M_1=1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор $M_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$, отличный от нуля. Переходим теперь к минорам $3-го$ порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый). Вычисляем их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы A равен двум.

Пример 12. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

и привести ее к каноническому виду.

Решение. Из второй строки вычтем первую и переставим эти строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix};$$

из третьей строки вычтем вторую, при этом получим матрицу

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая эквивалентна матрице A, так как получена из нее с помощью конечного множества элементарных преобразований. Очевидно, что ранг матрицы B равен 2, а следовательно, и $r(A)=2$.

Матрицу $\boldsymbol{B}$ легко привести к канонической.

Вычитая первый столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы первой строки, кроме первого, причем элементы остальных строк не изменяются.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{-7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Затем, вычитая второй столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы второй строки, кроме второго, и получим каноническую матрицу:

$$. \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

5. Обратная матрица

Пусть дана квадратная матрица:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\Delta = det\, A$.

Квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется *невырожденной,* или *неособенной*, если ее определитель отличен от нуля, и *вырожденной,* или *особенной*, если $\Delta = 0$.

Квадратная матрица $\boldsymbol{B}$ называется *обратной* для квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ того же порядка, если их произведение $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ - единичная матрица того же порядка, что и матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

Теорема. Для того чтобы матрица $\boldsymbol{A}$ имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Матрица, обратная матрице $\boldsymbol{A}$, обозначается через $\boldsymbol{A}^{-1}$, так что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}. Или

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} det(A_{11}) & (-1)^{1+2} det(A_{21}) & \dots & (-1)^{1+n} det(A_{n1}) \\ (-1)^{2+1} det(A_{12}) & (-1)^{2+2} det(A_{22}) & \dots & (-1)^{2+n} det(A_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} det(A_{1n}) & (-1)^{n+2} det(A_{2n}) & \dots & (-1)^{n+n} det(A_{nn}) \end{pmatrix}^{T}$$

Таким образом, обратная матрица – это транспонированная матрица алгебраических дополнений, умноженная на коэффициент $\dfrac{1}{det(A)}$.

Вычисление обратной матрицы по этой формуле для матриц высокого порядка очень трудоемко, поэтому на практике бывает удобно находить обратную матрицу с помощью метода элементарных преобразований (*ЭП*).

Любую неособенную матрицу A путем ЭП только столбцов (или только строк) можно привести к единичной матрице E.

Если совершенные над матрицей A ***ЭП*** в том же порядке применить к единичной матрице E, то в результате получится обратная матрица. Удобно совершать ***ЭП*** над матрицами A и E одновременно, записывая обе матрицы рядом через черту.

Замечание. Отметим, что при отыскании канонического вида матрицы с целью нахождения ее ранга можно пользоваться преобразованиями строк **и** столбцов. Если нужно найти обратную матрицу, в процессе преобразований следует использовать **только** строки или **только** столбцы.

Пример 15. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ найти обратную ей матрицу.

Решение. Находим сначала детерминант матрицы A (для этого прибавляем ко второму столбцу первый, а от третьего отнимаем первый, деленный на два):

$$\Delta = det\, A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & 1{,}5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 1{,}5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4{,}5 + 9) = 27 \neq 0$$

значит, обратная матрица существует, и мы ее можем найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ - алгебраические дополнения элементов a_{ij} исходной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$$

Откуда

$$A^{-1}=\frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix}6&6&3\\-6&3&6\\3&-6&6\end{pmatrix}=\frac{3}{27}\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\-6&3&6\\3&-6&6\end{pmatrix}=\frac{3\cdot3}{27}\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\3&-6&6\end{pmatrix}=$$

$$A^{-1}=\frac{3\cdot3\cdot3}{27}\cdot\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Пример 16. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы: $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\5&2&4\\7&3&2\end{pmatrix}$.

Решение. Приписываем к исходной матрице справа единичную матрицу того же порядка: $A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\5&2&4&0&1&0\\7&3&2&0&0&1\end{array}\right)$. С помощью элементарных преобразований столбцов приведем левую “половину” к единичной, совершая одновременно точно такие преобразования над правой матрицей.

1. Поменяем местами первый и второй столбцы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\5&2&4&0&1&0\\7&3&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-1&0&1&0\\2&5&4&1&0&0\\3&7&2&0&0&1\end{array}\right).$$

2. К третьему столбцу прибавим первый, а ко второму - первый, умноженный на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\2&1&6&1&-2&1\\3&1&5&0&0&1\end{array}\right).$$

3. Из первого столбца вычтем удвоенный второй, а из третьего - умноженный на 6 второй;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&1&-6\\0&1&0&5&-2&13\\1&1&-1&0&0&1\end{array}\right).$$

4. Прибавим третий столбец к первому и второму:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-8&-5&-6\\0&1&0&18&11&13\\0&0&-1&1&1&1\end{array}\right).$$

5. Умножим последний столбец на -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной к данной матрице A. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Системы линейных уравнений.

Система линейных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m. \end{cases}$$

Здесь a_{ij} и b_i $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\right)$ - заданные, а x_j - неизвестные действительные числа. Используя понятие произведения матриц, можно переписать систему в виде:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

где $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)$ - матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных, которая называется *матрицей системы*, $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$, $B = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)^T$ - векторы-столбцы, составленные соответственно из неизвестных $\mathbf{x_j}$ и из свободных членов $\mathbf{b_i}$.

Упорядоченная совокупность n вещественных чисел $\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$ называется *решением системы*, если в результате подстановки этих чисел вместо соответствующих переменных $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ каждое уравнение системы обратится в арифметическое тождество.

Система называется ***совместной***, или ***разрешимой***, если она имеет по крайней мере одно решение. Система называется ***несовместной***, или ***неразрешимой***, если она не имеет решений.

Матрица

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

образованная путем приписывания справа к матрице **A** столбца свободных членов, называется ***расширенной матрицей системы***.

Вопрос о совместности системы решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли.

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранги матриц **A** и $\overline{\mathbf{A}}$ совпадают, т.е. $r(\mathrm{A}) = r(\overline{\mathrm{A}}) = r$.

Система имеет единственное решение только в том случае, когда $r(\mathrm{A})=n$. При этом число уравнений - не меньше числа неизвестных $(m \geq n)$; если $m > n$, то $m-n$ уравнений являются следствиями остальных. Если $0 < r < n$, то система является неопределенной.

Для решения произвольной системы линейных уравнений нужно уметь решать системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных, - так называемые ***системы крамеровского типа***:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n. \end{cases}$$

Эти системы решаются одним из следующих способов:

1) методом Гаусса, или методом исключения неизвестных;
2) по формулам Крамера;
3) матричным методом.

Пример. Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы системы. Очевидно, что, например, минор второго порядка в левом верхнем углу $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$; содержащие его миноры третьего порядка равны нулю:

$$\mathrm{M}_3' = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \mathrm{M}_3'' = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, ранг основной матрицы системы равен 2, т.е. $r(\mathrm{A})=2$. Для вычисления ранга расширенной матрицы $\overline{\mathbf{A}}$ рассмотрим окаймляющий минор

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0,$$

значит, ранг расширенной матрицы $r(\overline{\mathrm{A}})=3$. Поскольку $r(\mathrm{A}) \neq r(\overline{\mathrm{A}})$, то система несовместна.

6.а. Метод Гаусса

Исторически первым, наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса, или метод последовательного исключения неизвестных. Сущность этого метода состоит в том, что посредством последовательных исключений неизвестных, данная система превращается в ступенчатую (в частности, треугольную) систему, равносильную данной. При практическом решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобнее приводить к ступенчатому виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя элементарные преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+y-3z=2, \\ 2x+y-2z=0, \\ 3x-2y+z=-1. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

и произведем следующие элементарные преобразования над ее строками:

а) из ее второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на **3** и **2**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

б) третью строку умножим на (- **5**) и прибавим к ней вторую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 13 \end{pmatrix}.$$

В результате всех этих преобразований данная система приводится к треугольному виду:

$$\begin{cases} x+y-3z=2, \\ -5y+10z=-7, \\ -10z=13. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $z=-1{,}3$. Подставляя это значение во второе уравнение, имеем $y=-1{,}2$. Далее из первого уравнения получим $x=-0{,}7$.

6.б. Формулы Крамера

Назовем столбцы матрицы A следующим образом: первый столбец - A_1, второй столбец - A_2, и т.д., последний столбец - A_n.

Составим n дополнительных матриц:

$$D_1=(b \quad A_2 \quad \dots \quad A_n),\ D_2=(A_1 \quad b \quad \dots \quad A_n), \dots, D_n=(A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad b),$$

и вычислим их определители и определитель исходной матрицы:

$$\Delta = det(A),\ \Delta 1 = det(D_1),\ \Delta 2 = det(D_2),\ \ldots,\ \Delta n = det(D_n).$$

Тогда значения неизвестных вычисляются по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta n}{\Delta}.$$

Правило ***Крамера*** дает исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы: если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, определяемое по вышеприведенным формулам.

Если главный определитель системы Δ и все вспомогательные определители Δi равны нулю, то система имеет бесчисленное множество решений.

Если главный определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один вспомогательный определитель отличен от нуля, то система несовместна.

Пример. Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определители этих матриц, получаем $\Delta = 5$, $\Delta 1 = 15$, $\Delta 2 = 5$, $\Delta 3 = 10$.

И по формулам Крамера находим: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

6.в. Матричный метод

Теперь, рассмотрим матричное уравнение $A \cdot X = b$. Если у матрицы A существует обратная матрица A^{-1}, то, умножая матричное уравнение на A^{-1} слева, получим:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot b.$$

По определению обратимости матрицы $A^{-1} \cdot A = E$ и по свойству единичной $E \cdot X = X$, получаем:

$$X = A^{-1} \cdot b.$$

Пример 17. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A, разлагая по первой строке:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-9+4) - 2 \cdot (-15+6) - (10-9) = -20 + 18 - 1 = -3$$

Значит, обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$(-1)^{1+1} det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5, \quad (-1)^{1+2} det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9,$$

$$(-1)^{1+3} det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad (-1)^{2+1} det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$(-1)^{2+2} det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9, \quad (-1)^{2+3} det(A_{23}) = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$(-1)^{3+1} det(A_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad (-1)^{3+2} det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3,$$

$$(-1)^{3+3} det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Тогда решение системы получается умножением обратной матрицы на столбец свободных членов

$$X = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -3 & 3 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ -3+6+1 \\ -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 4 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

7. Системы линейных уравнений общего вида

Если система уравнений оказалась совместной, т. е. матрицы A и B имеют один и тот же ранг, то могут представиться две возможности - а) $r = n$, б) $r < n$.

а) Если $r = n$, то имеем n независимых уравнений с n неизвестными, причем определитель Δ этой системы отличен от нуля. Такая система имеет единственное решение, получаемое, например, по формулам Крамера.

б) Если $r < n$, то число независимых уравнений меньше числа неизвестных.

Перенесем лишние неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$, которые принято называть свободными, в правые части; наша система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1r}\cdot x_r = b_1 - a_{1r+1}\cdot x_{r+1} - \dots - a_{1n}\cdot x_n, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2r}\cdot x_r = b_2 - a_{2r+1}\cdot x_{r+1} - \dots - a_{2n}\cdot x_n, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{r1}\cdot x_1 + a_{r2}\cdot x_2 + \dots + a_{rr}\cdot x_r = b_r - a_{rr+1}\cdot x_{r+1} - \dots - a_{rn}\cdot x_n. \end{cases}$$

Ее можно решить относительно $x_1, x_2, \dots, x_r$, так как определитель этой системы ($r-го$ порядка) отличен от нуля. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, получим по формулам Крамера соответствующие числовые значения для $x_1, x_2, \dots, x_r$. Таким образом, при $r < n$ имеем бесчисленное множество решений.

Система уравнений называется ***однородной***, если все $b_i = 0$, т. е. она имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = 0, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n = 0. \end{cases}$$

Из теоремы Кронекера-Капелли следует, что она всегда совместна, так как добавление столбца из нулей не может повысить ранга матрицы. Это, впрочем, видно и непосредственно - система заведомо обладает нулевым, или тривиальным, решением $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Пусть матрица A системы имеет ранг r.

Если $r = n$, то нулевое решение будет единственным решением системы; при $r < n$ система обладает решениями, отличными от нулевого, и для их разыскания применяют тот же прием, как и в случае произвольной системы уравнений.

Всякий ненулевой вектор - столбец $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ называется ***собственным вектором линейного преобразования*** (***квадратной матрицы*** A), если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство $AX = \lambda \cdot X$.

Число λ называется *собственным значением линейного преобразования* (*матрицы* A), соответствующим вектору X. Матрица A имеет порядок n.

В математической экономике большую роль играют так называемые *продуктивные матрицы*. Доказано, что матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы.

Для нахождения собственных значений матрицы A перепишем равенство $AX = \lambda \cdot X$ в виде $(A - \lambda E)X = 0$, где E - единичная матрица $n-го$ порядка или в координатной форме:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = 0, \\ a_{21}\cdot x_1 + (a_{22}-\lambda)\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\cdot x_n = 0. \end{cases}$$

Получили систему линейных однородных уравнений, которая имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, т.е.

$$(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Получили уравнение $n-ой$ степени относительно неизвестной λ, которое называется *характеристическим уравнением матрицы* A, многочлен $|A-\lambda E|$ называется *характеристическим многочленом матрицы* A, а его корни - *характеристическими числами, или собственными значениями, матрицы* A.

Для нахождения собственных векторов матрицы A в векторное уравнение $(A-\lambda E)X = 0$ или в соответствующую систему однородных уравнений нужно подставить найденные значения λ и решать обычным образом.

Пример 18. Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Будем находить ранги матриц A и B методом элементарных преобразований, приводя одновременно систему к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r(A) = r(B) = 2$. Исходная система равносильна следующей системе, приведенной к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ -4x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$$

Поскольку определитель при неизвестных x_1 и x_2 отличен от нуля, то их можно принять в качестве главных и переписать систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 + x_4 - x_5 + 1, \\ -4x_2 = -7x_3 - 7x_4 + 1. \end{cases}$$

откуда $x_2 = \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5 + \frac{5}{4}$ - общее решение системы, имеющей бесчисленное множество решений. Придавая свободным неизвестным x_3, x_4, x_5 конкретные числовые значения, будем получать частные решения. Например, при $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. Вектор $C\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0\right)$ является частным решением данной системы.

Пример 19. Исследовать систему уравнений и найти общее решение в зависимости от значения параметра a.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \text{a}. \end{cases}$$

Решение. Данной системе соответствует матрица

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \text{a}-2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \text{a}-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{a}-5 \end{pmatrix}$$

следовательно, исходная система равносильна такой:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 = \text{a} - 2, \\ 0 = \text{a} - 5. \end{cases}$$

Отсюда видно, что система совместна только при $a = 5$. Общее решение в этом случае имеет вид:

$$x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, \; x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4.$$

Пример 20. Выяснить, будет ли линейно зависимой система векторов:

$$\begin{cases} \overline{a}_1 = (1, 1, 4, 2), \\ \overline{a}_2 = (1, -1, -2, 4), \\ \overline{a}_3 = (0, 2, 6, -2), \\ \overline{a}_4 = (-3, -1, 3, 4), \\ \overline{a}_5 = (-1, 0, -4, -7). \end{cases}$$

Решение. Система векторов является линейно зависимой, если найдутся такие числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется векторное равенство:

$$x_1 \cdot \overline{a}_1 + x_2 \cdot \overline{a}_2 + x_3 \cdot \overline{a}_3 + x_4 \cdot \overline{a}_4 + x_5 \cdot \overline{a}_5 = 0.$$

В координатной записи оно равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Итак, получили систему линейных однородных уравнений. Решаем ее методом исключения неизвестных:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&-10&10&-5&10\\0&2&-2&10&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&-2&2&-1&2\\0&2&-2&10&-5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&12&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-3&0&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&-3&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Система приведена к ступенчатому виду. Ранг матрицы равен 3, значит однородная система уравнений имеет решения, отличные от нулевого ($\mathrm{r} < \mathrm{n}$). Определитель при неизвестных x_1, x_2, x_4 отличен от нуля, поэтому их можно выбрать в качестве главных и переписать систему в виде:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 - 3x_4 = x_5,\\ -2x_2 + 2x_4 = -2x_3 - x_5,\\ 3x_4 = x_5.\end{cases}$$

Имеем:

$$x_4 = \frac{1}{3}x_5\,,\ x_2 = \frac{5}{6}x_5 + x_3\,,\ x_1 = \frac{7}{6}x_5 - x_3\,.$$

Система имеет бесчисленное множество решений; если свободные неизвестные x_3 и x_5 не равны нулю одновременно, то и главные неизвестные отличны от нуля. Следовательно, векторное уравнение

$$x_1\cdot\overline{a}_1 + x_2\cdot\overline{a}_2 + x_3\cdot\overline{a}_3 + x_4\cdot\overline{a}_4 + x_5\cdot\overline{a}_5 = 0$$

имеет коэффициенты, не равные нулю одновременно; пусть например, $x_5 = 6$, $x_3 = 1$. Тогда $x_4 = 2$, $x_2 = 6$, $x_1 = 6$ и мы получим соотношение

$$6\cdot\overline{a}_1 + 6\cdot\overline{a}_2 + 1\cdot\overline{a}_3 + 2\cdot\overline{a}_4 + 6\cdot\overline{a}_5 = 0,$$

т.е. данная система векторов линейно независима.

Пример 21. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix}3&-1&0&0\\1&1&0&0\\3&0&-5&-3\\4&-1&3&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A:

$$|A-\lambda E| = det\begin{pmatrix}3-\lambda&-1&0&0\\1&1-\lambda&0&0\\3&0&-5-\lambda&-3\\4&-1&3&1-\lambda\end{pmatrix} = det\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\\lambda^2-4\lambda+4&1-\lambda&0&0\\3&0&-5-\lambda&-3\\1+\lambda&-1&3&1-\lambda\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}\lambda^2-4\lambda+4&0&0\\3&-5-\lambda&-3\\1+\lambda&3&1-\lambda\end{vmatrix} = -\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)\begin{vmatrix}5+\lambda&3\\3&1-\lambda\end{vmatrix}$$

Итак, $|A-\lambda E| = (\lambda-2)^2\cdot(\lambda+2)^2$. Корни характеристического уравнения $|A-\lambda E| = 0$ - это числа $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$. Другими словами, мы нашли собственные значения матрицы A. Для нахождения собственных векторов матрицы A подставим найденные значения λ в систему: при $\lambda = 2$ имеем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, собственному значению $\lambda = 2$ отвечают собственные векторы вида k (8, 8, -3, 15), где k - любое отличное от нуля действительное число. При $\lambda = -2$ имеем:

$$A - \lambda EA + 2E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и поэтому координаты собственных векторов должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Поэтому собственному значению $\lambda = -2$ отвечают собственные векторы вида b (0, 0,-1, 1), где b - любое отличное от нуля действительное число.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Понятие вектора

Все величины бывают ***скалярные*** и ***векторные.*** Скалярной величиной или скаляром называется величина, которая вполне определяется своим численным значением.

Примеры физических скалярных величин: $\boldsymbol{t}$-температура; $\boldsymbol{m}$ - масса; $\boldsymbol{\rho}$ - плотность; $\boldsymbol{L}$ - длина; $\boldsymbol{S}$ - площадь и т.д.

Вектором или векторной величиной называется величина, которая характеризуется не только своим численным значением, но и определенным направлением в рассматриваемом пространстве.

Векторы - сила, скорость, ускорение, напряженность электрического поля.

Определение 1. Направленный отрезок (или, и что то же, упорядоченная пара точек - начало и конец отрезка) называется ***вектором***.

Геометрическое изображение вектора: $A \xrightarrow{\overline{a}} B$

Обозначение вектора: $\overline{\boldsymbol{AB}}$, либо $\overline{\boldsymbol{a}}$ либо жирной строчной буквой **a**. Направление на отрезке обозначается стрелкой.

Численное значение вектора называется его модулем или абсолютной величиной и обозначается: $\left|\overline{\boldsymbol{AB}}\right|$, $\left|\overline{\boldsymbol{a}}\right|$.

Нулевой вектор – это вектор у которого начало и конец совпадают. Он обозначается $\overline{\mathbf{0}}$ и его модуль равен нулю, а направление неопределенно.

Определение 2. Векторы называются ***коллинеарными***, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначают: $\overline{\boldsymbol{a}} \| \overline{\boldsymbol{b}}$.

Определение 3. Векторы называются ***компланарными***, если существует плоскость, которой они параллельны.

Определение 4. Два вектора называются ***равными,*** если они коллинеарные, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.

Из этого определения следует, что мы будем изучать свободные векторы. То есть вектор параллельно самому себе, не изменяя направления, можно переносить в любую точку пространства.

Векторы являются предметом векторного исчисления подобно тому, как числа являются предметом арифметики или алгебры.

2. Линейные операции над векторами.

К линейным операциям над векторами относятся операции умножения вектора на число и сложение векторов.

Определение 5. Под произведением вектора $\bar{a}$ на число α понимается вектор $\bar{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\bar{b}| = |\alpha| \cdot |\bar{a}|$;

2) вектор $\bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{a}$ ($\bar{b} \parallel \bar{a}$);

3) векторы $\bar{b}$ и $\bar{a}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$ и противоположно, если $\alpha < 0$.

Произведение вектора $\bar{a}$ на число α обозначается $\alpha \cdot \bar{a}$.

Замечание 1. Пусть $\alpha = \dfrac{1}{|\bar{a}|}$ $\left(|\bar{a}| \neq 0\right)$, рассмотрим вектор $\bar{e} = \dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$, тогда $|\bar{e}| = \dfrac{|\bar{a}|}{|\bar{a}|} = 1$. Векторы $\bar{e}$ и $\bar{a}$ коллинеарные и одинаково направлены, тогда $\bar{e}$ - ***единичный вектор***, сонаправленный с $\bar{a}$. Вектор $\bar{e}$ - орт вектора $\bar{a}$, и обозначается $\bar{a}^0$, т.е. $\bar{e} = \bar{a}^0$ и $\bar{a} = \bar{e} \cdot |\bar{a}|$ или $\bar{a} = \bar{a}^0 \cdot |\bar{a}|$.

Замечание 2. Пусть дан вектор $\bar{a} \neq 0$. Для любого коллинеарного ему вектора $\bar{b}$ существует и притом одно число λ, удовлетворяющее равенству $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$. Тогда $|\bar{b}| = \lambda \cdot |\bar{a}|$ и $\lambda = \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$, если $\bar{b}$ и $\bar{a}$ одинаково направлены и $\lambda = -\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$, если они противоположно направлены.

Определение 6. Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, приведенных к общему началу, является диагональ параллелограмма ($\overline{OA}$ см. рис. 1), построенного на этих векторах как на сторонах (***правило параллелограмма***). ***Правило треугольника***: начало следующего вектора поместить в конец предыдущего и вектор, соединяющий начало первого с концом последнего есть вектор суммы (см. рис. 2).

Чтобы сложить несколько векторов, достаточно начало каждого последующего

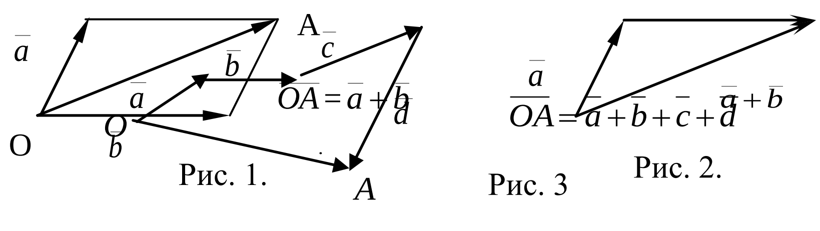


Рис. 1. Рис. 3 Рис. 2.

вектора совместить с концом предыдущего, тогда замыкающий вектор, идущий из начала первого в конец последнего, будет вектором суммы (правило многоугольника см. рис. 3).

Если точка A совпадает с точкой O, то сумма векторов равна нулю.

Определение 7. *Вектором, **противоположным** к данному* вектору $\bar{a}$, называется вектор $-\bar{a}$, модуль которого равен модулю вектора $\bar{a}$, а направление противоположно (см. рис. 4).

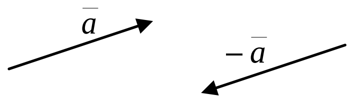


Рис. 4 $\quad \bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$

Определение 8. Под ***разностью*** *двух векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается такой третий вектор $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$, который при сложении с вычитаемым вектором $\bar{b}$ дает уменьшаемый вектор $\bar{a}$.

Правило построения разности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

Приводим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к общему началу, и соединяем концы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

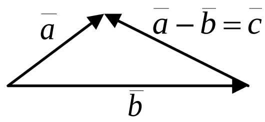


Рис. 5

Вектор разности направлен из конца вычитаемого вектора ($\bar{b}$) в конец уменьшаемого вектора ($\bar{a}$ см. рис. 5).

Свойства линейных операций над векторами.

1) Сложение векторов коммутативно, т.е. для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполнено $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$.

2) Сложение векторов ассоциативно, т.е. для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ выполнено $\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}$.

3) Прибавление нулевого вектора $\bar{0}$ к любому вектору $\bar{a}$, не меняет последнего: $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$.

4) Для любого вектора $\bar{a}$ вектор $-\bar{a}$ является противоположным, т.е. $\bar{a}+\left(-\bar{a}\right)=\mathbf{0}$.

5) Умножение вектора на число ассоциативно, т.е. для любых чисел α и β и любого вектора $\bar{a}$, выполнено $(\alpha\cdot\beta)\cdot\bar{a}=\alpha\cdot\left(\beta\cdot\bar{a}\right)=\beta\cdot\left(\alpha\cdot\bar{a}\right)$.

6) Умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению чисел: $(\alpha+\beta)\cdot\bar{a}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\cdot\bar{a}$.

7) Умножение вектора на число дистрибутивно по отношению к сложению векторов: $\alpha\cdot\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=\alpha\cdot\bar{a}+\alpha\cdot\bar{b}$.

8) Умножение вектора на единицу не меняет вектора: $\mathbf{1}\cdot\bar{a}=\bar{a}$.

3. Понятие линейной зависимости векторов.

Определение 9. Пусть дана система векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, …, $\bar{a}_n$ и совокупность n

вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Тогда выражение вида $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots \alpha_n \overline{a_n}$ называется ***линейной комбинацией векторов***, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ называются коэффициентами линейной комбинации. Если некоторый вектор $\overline{a}$ представлен как линейная комбинация векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots \overline{a}_n$, т.е. в виде: $\overline{a} = \alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{a}_2 + \dots + \alpha_n \overline{a}_n$, то говорят, что вектор $\overline{a}$ разложен по этим векторам.

Определение 10. Векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …,$\overline{a}_n$ называются ***линейно зависимыми,*** если существует набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, одновременно не равных нулю $\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0\right)$ и таких, что

$$\alpha_1 \cdot \overline{a}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{a}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \overline{a}_n = \mathbf{0}.$$

Определение 11. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots \overline{a}_n$ называются ***линейно независимыми,*** если равенство нулю линейной комбинации этих векторов возможно лишь при всех коэффициентах одновременно равных нулю.

Определение 12. Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор на этой прямой.

Определение 13. Базисом на плоскости называются два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятые в определенном порядке.

Определение 14. Базисом в пространстве R^3 называются три линейно независимые вектора в этом пространстве, взятые в определенном порядке.

Теорема 1 (о разложении вектора по базису в пространстве R^3)

Пусть даны три некомпланарные вектора: $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$. Любой вектор $\overline{a}$ раскладывается по ним. Такое разложение единственно. Существует набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такой, что:

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{e}_2 + \alpha_3 \cdot \overline{e}_3.$$

Свойства линейно зависимой и линейно независимой системы векторов:

1) Если хотя бы один из n векторов есть нуль вектор, то все n векторов линейно зависимы.

2) Если среди n векторов какие-либо $n-1$ векторов линейно зависимы, то все n векторов линейно зависимы.

3) Для того чтобы два ненулевых вектора были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарными.

4) Пусть $\overline{e}_1$ *и* $\overline{e}_2$ - два неколлинеарных вектора плоскости. Любой компланарный с ними вектор $\overline{a}$ раскладывается по ним: $\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{e}_2$. Такое разложение единственно.

5) Три компланарных вектора линейно зависимы. Три некомпланарных вектора пространства линейно независимы.

6) Любые четыре вектора пространства R^3 линейно зависимы.

7) Система векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, …,$\overline{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из них раскладывается в линейную комбинацию остальных.

4. Понятие о проекциях.

Пусть дан вектор $\overline{a}$ и ось OL, φ - угол между вектором $\overline{a}$ и положительным направлением оси OL. A' и B' -

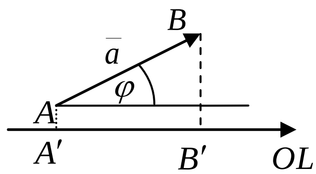


Рис. 6

основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B соответственно (см. рис. 6).

Определение 15. Проекцией вектора на ось называется длина отрезка оси $A'B'$, взятая со знаком плюс, если вектор $\bar{a}$ образует острый угол с направлением оси, и со знаком минус в противоположном случае.

Теорема 2. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось OL равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью: $np_{OL}\overline{AB} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

Следствие. При умножении вектора $\bar{a}$ на некоторое число α его проекция умножается на это же число: $np_{OL}(\alpha \cdot \bar{a}) = \alpha \cdot np_{OL}\bar{a}$.

Теорема 3 (о проекции суммы). Проекция суммы некоторого числа векторов на ось L равна сумме проекций слагаемых векторов: $\bar{a} = \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$, $np_L\bar{a} = np_L\bar{b} + np_L\bar{c} + np_L\bar{d}$.

Декартова система координат.

Ортонормированный базис образуют взаимно перпендикулярные векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ единичной длины, т.е.

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1 \text{ и } (\bar{i}\wedge\bar{j}) = (\bar{j}\wedge\bar{k}) = (\bar{i}\wedge\bar{k}) = \frac{\pi}{2}.$$

Точка O - начало координат $O(0,0,0)$. Прямые, проходящие через начало координат в направлении векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называются осями координат. Векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответствуют положительному направлению осей координат: OX, OY, OZ - оси абсцисс, ординат и аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями OXY, OXZ, OYZ (см. рис.7).

Определение 16. Прямоугольной системой координат называется совокупность точки (O) и ортонормированного базиса.

Определение 17. Радиус-вектором произвольной точки M по отношению к точке O, называется вектор $\overline{OM}$. Точке M можно сопоставить упорядоченную тройку чисел (x, y, z) - компоненты ее радиус-вектора: $M(x, y, z)$ и $\bar{r} = \overline{OM} = \{x, y, z\}$ (см. рис. 8).

Определение 18. Компоненты радиус-вектора точки M по отношению к началу

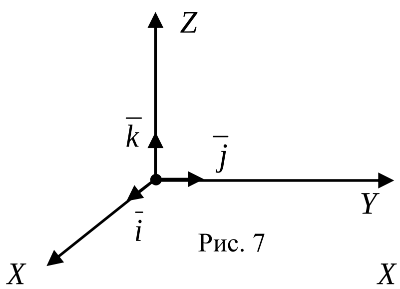


Рис. 7

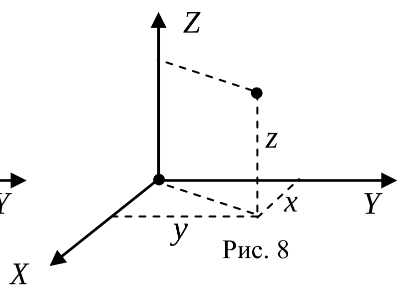


Рис. 8

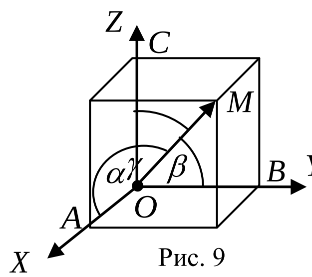


Рис. 9

координат называют координатами точки M в рассматриваемой системе координат.

Координаты вектора совпадают с проекцией вектора на соответствующие оси координат (рис.8):

$$x = np_{OX}\bar{r},\ y = np_{OY}\bar{r},\ z = np_{OZ}\bar{r},\ \bar{r} = \bar{i}\,x + \bar{j}\,y + \bar{k}\,z,\ \bar{r} = \{x, y, z\}$$

Согласно рис. 9 имеем: $\bar{r} = \overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{i}\,x + \bar{j}\,y + \bar{k}\,z$, $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$,

$$|\bar{r}| = \sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Пусть вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ задан координатами крайних точек, $A(x_1, y_1, z_1)$ и

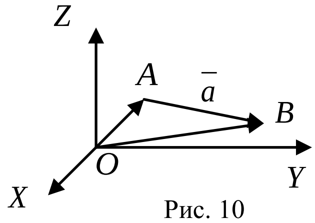


Рис. 10

$B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 10).

Тогда

$$\bar{a} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \left(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}\right) - (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Следовательно, чтобы определить координаты вектора по координатам крайних точек, надо из координат конца вычесть соответствующие координаты начала: $\bar{a} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$.

Определение 19. Пусть α, β, γ - углы между вектором $\bar{r}$ и соответственно ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (рис. 9), тогда ***направляющие косинусы*** вектора $\bar{r}$ определяются по правилу:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\bar{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\bar{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

Следовательно, сумма квадратов направляющих косинусов равна 1:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Пример 1. Даны точки $A(-3, 1, 2)$, $B(4, -3, 2)$, $C(0, -1, 3)$, $D(-6, 2, 1)$.

Найти координаты и длину вектора $\overline{AB} - 2\overline{CD}$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$:

$$\overline{AB} = \{4 - (-3), -3 - 1, 2 - 2\}, \quad \overline{AB} = \{7, -4, 0\},$$

$$\overline{CD} = \{-6-0, 2-(-1), 1-3\}, \qquad \overline{CD} = \{-6, 3, -2\}.$$

По правилам действий с векторами, получим:

$2\overline{CD} = \{-12, 6, -4\}$ и $\overline{AB} - 2\overline{CD} = \{7, -4, 0\} - \{-12, 6, -4\} = \{19, -10, 4\}$}.

Теперь находим длину искомого вектора:

$\left|\overline{AB} - 2\cdot\overline{CD}\right| = \sqrt{19^2 + (-10)^2 + 4^2} = \sqrt{477}$.

Пример 2. Даны точки $A(-3, 1, 2)$, $B(4, -3, 2)$.

Найти направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

Решение. Так как $\overline{AB} = \{4-(-3), -3-1, 2-2\} = \{7, -4, 0\}$, то $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{7^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{65}$ и направляющие косинусы находятся согласно формулам:

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{65}}, \quad \cos\beta = \frac{-4}{\sqrt{65}}, \quad \cos\gamma = 0.$$

Связь компонент, проекций, направляющих косинусов и коэффициентов в разложении по базису.

Пусть вектор $\overline{a} = \{x, y, z\}$ в пространстве R^3; $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ - ортонормированный базис в данной системе координат, α, β, γ - углы между вектором $\overline{r}$ и соответственно ортами $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Тогда

$$\overline{a} = \overline{i}\,x + \overline{j}\,y + \overline{k}\,z,$$

где $\overline{i}\,x$, $\overline{j}\,y$, $\overline{k}\,z$ -составляющие вектора $\overline{a}$, x, y, z - координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$,

$$x = np_{OX}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cdot\cos\alpha, \quad y = np_{OY}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cdot\cos\beta, \quad z = np_{OZ}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cdot\cos\gamma.$$

Деление отрезка в данном отношении.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Координаты точки $C(x, y, z)$ на отрезке AB, которая делит этот отрезок в отношении λ, т.е. $\frac{AC}{CB} = \lambda$, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda\cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda\cdot y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda\cdot z_2}{1+\lambda}.$$

Координаты середины отрезка AB соответствуют значению $\lambda = 1$ и определяются как полусумма координат концов отрезка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

5. *Линейные операции над векторами, заданными своими координатами.*

Пусть $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

1) При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число: $\bar{c} = \alpha \cdot \bar{a}$, $\alpha \in R$, тогда $\bar{c} = \{\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1\}$.

2) При сложении (вычитании) векторов их одноименные проекции складываются (вычитаются): $\bar{c} = \bar{a} \pm \bar{b}$, тогда $\bar{c} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$.

5.а. *Скалярное произведение векторов.*

Определение 20. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается скалярное произведение символом $(\bar{a} \cdot \bar{b})$ или $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

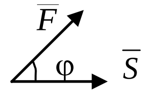
Скалярное произведение векторов можно выразить формулами:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot cos(\angle(\bar{a}\,\bar{b})) = |\bar{a}| \cdot np_{\bar{a}}\, \bar{b} \qquad np_{\bar{a}}\, \bar{b} = |\bar{b}| \cdot np_{\bar{b}}\, \bar{a}$$

Отсюда скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного вектора на проекцию на него другого.

Пусть вектор перемещения $\bar{S}$ будет неподвижен, а точка приложения вектора силы $\bar{F}$ скользит вдоль вектора $\bar{S}$, тогда

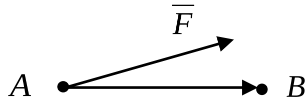
$$\bar{F} \cdot \bar{S} = |\bar{S}| \cdot np_{\bar{S}}\, \bar{F} = |\bar{F}| \cdot |\bar{S}| \cdot cos\,\varphi = A$$



есть работа, совершаемая под действием силы $\bar{F}$ вдоль вектора $\bar{S}$.

Пример 3. Вычислить, какую работу производит сила $\bar{F} = \{5, 2, 1\}$, когда точка ее приложения перемещается из $A(3, 0, 3)$ в $B(-4, 1, 2)$.

Решение. Образуем вектор перемещения $\bar{S} = \overline{AB} = \{-7, 1, -1\}$.



Тогда работа $A = (\bar{F}\,\bar{S}) = -35 + 2 - 1 = -34$.

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами.

Пусть $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ тогда

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 .$$

Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат.

Свойства скалярного произведения.

1) Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы ортогональны: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \quad \to \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Скалярное произведение коммутативно: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.

3) Скалярное произведение ассоциативно относительно скалярного множителя: $(\alpha \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha \cdot (\bar{b} \cdot \bar{a})$.

4) Скалярное произведение дистрибутивно:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{b}) + (\bar{a} \cdot \bar{c}).$$

5) Свойство скалярного квадрата: $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$, отсюда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Рассмотрим таблицу скалярного умножения ортов:

$$(\bar{i}\cdot\bar{i}) = (\bar{j}\cdot\bar{j}) = (\bar{k}\cdot\bar{k}) = 1$$

$$(\bar{i}\cdot\bar{j}) = (\bar{i}\cdot\bar{k}) = (\bar{j}\cdot\bar{i}) = (\bar{j}\cdot\bar{k}) = (\bar{k}\cdot\bar{i}) = (\bar{k}\cdot\bar{j}) = 0$$

Скалярное произведение одноименных ортов равно единице, а разноименных - нулю.

Угол между двумя векторами.

Из определения скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \qquad \cos\varphi = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Условие ортогональности двух векторов:

$$x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2 = 0$$

Условие коллинеарности двух векторов:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Следует из определения 5 - $\bar{b} = \alpha\bar{a}$. Действительно, из определения произведения вектора на число, следует $\bar{i}x_1 + \bar{j}y_1 + \bar{k}z_1 = \bar{i}\alpha x_2 + \bar{j}\alpha y_2 + \bar{k}\alpha z_2$. Поэтому, исходя из правила равенства векторов, запишем $x_1 = \alpha\cdot x_2$, $y_1 = \alpha\cdot y_2$, $z_1 = \alpha\cdot z_2$, откуда вытекает $\alpha = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. Но вектор $\bar{b}$, получившийся в результате умножения вектора $\bar{a}$ на число α, коллинеарен вектору $\bar{a}$.

Проекция вектора на вектор:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Пример 4. Даны точки $A(-3,1,2)$, $B(4,-3,2)$, $C(0,-1,3)$, $D(-6,2,1)$.

Найти скалярное произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$.

Решение. $(\overline{AB}\cdot\overline{CD})$ найдем по формуле скалярного произведения векторов, заданных своими координатами. Поскольку

$$\overline{AB} = \{4-(-3), -3-1, 2-2\}, \qquad \overline{AB} = \{7,-4,0\},$$

$$\overline{CD} = \{-6-0, 2-(-1), 1-3\}, \qquad \overline{CD} = \{-6,3,-2\}$$

то

$$(\overline{AB}\cdot\overline{CD}) = 7\cdot(-6) + (-4)\cdot 3 + 0\cdot(-2) = -54.$$

Пример 5. Даны точки $A(-3,1,2)$, $B(4,-3,2)$, $C(0,-1,3)$, $D(-6,2,1)$.

Найти проекцию $np_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

Решение. Поскольку

$$\overline{AB} = \{4-(-3), -3-1, 2-2\}, \qquad \overline{AB} = \{7,-4,0\},$$

$$\overline{CD}=\{-6-0,2-(-1),1-3\},\quad \overline{CD}=\{-6,3,-2\}$$

то $\left(\overline{AB}\cdot\overline{CD}\right)=7\cdot(-6)+(-4)\cdot 3+0\cdot(-2)=-54$ и

$$\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\sqrt{49}=7.$$

На основании формулы проекции, имеем

$$np_{\overline{CD}}\,\overline{AB}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{CD}\right|}=\frac{-54}{7}.$$

Пример 6. Даны точки $A(-3,1,2)$, $B(4,-3,2)$, $C(0,-1,3)$, $D(-6,2,1)$. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение. Заметим, что вектора

$$\overline{AB}=\{4-(-3),-3-1,2-2\},\quad \overline{AB}=\{7,-4,0\},$$

$$\overline{CD}=\{-6-0,2-(-1),1-3\},\quad \overline{CD}=\{-6,3,-2\}$$

не являются коллинеарными, поскольку не пропорциональны их координаты:

$$\frac{7}{-6}\neq\frac{-4}{3}\neq\frac{0}{-2}.$$

Эти вектора не являются также перпендикулярными, так как их скалярное произведение $\left(\overline{AB}\cdot\overline{CD}\right)=7\cdot(-6)+(-4)\cdot 3+0\cdot(-2)=-54\neq 0$.

Найдем $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{7^2+4^2+0}=\sqrt{65}$, $\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\sqrt{49}=7$

Угол $\alpha=\angle\left(\overline{AB};\overline{CD}\right)$ найдем из формулы:

$$\cos\alpha=\frac{\left(\overline{AB}\cdot\overline{CD}\right)}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|}=\frac{-54}{\sqrt{65}\cdot 7}.$$

Пример 7. Определить при каких α *и* β вектора $\overline{a}=-2\overline{i}+3\overline{j}+\beta\overline{k}$ и $\overline{b}=\alpha\overline{i}-6\overline{j}+2\overline{k}$ коллинеарны.

Решение. В случае коллинеарности, соответствующие координаты векторов $\overline{a}=\{-2;3;\beta\}$ и $\overline{b}=\{\alpha;-6;2\}$ должны быть пропорциональны, то есть:

$$\frac{-2}{\alpha}=\frac{3}{-6}=\frac{\beta}{2}.$$

Отсюда $\alpha=4$ и $\beta=-1$.

Пример 8. Определить, при каком значении α вектора $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}+\alpha\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$ перпендикулярны.

Решение. Вектора $\overline{a}=\{3;-2;\alpha\}$ и $\overline{b}=\{1;3;-1\}$ перпендикулярны, если их скалярное произведение $\overline{a}\cdot\overline{b}$ равно нулю. Из этого условия получаем: $\left(\overline{a}\cdot\overline{b}\right)=3\cdot 1-2\cdot 3+\alpha\cdot(-1)=0$. Стало быть, $\alpha=-3$.

Пример 9. Найти $\left(2\overline{a}-\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{a}+3\overline{b}\right)$, если $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=3$, $\angle(\overline{a},\overline{b})=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. В силу свойств скалярного произведения, имеем:

$$\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)=2\bar{a}\bar{a}+6\bar{a}\bar{b}-\bar{b}\bar{a}-3\bar{b}\bar{b}=2\left|\bar{a}\right|^2+5\bar{a}\bar{b}-3\left|\bar{b}\right|^2=$$

$$=2\left|\bar{a}\right|^2+5\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|\cos\varphi-3\left|\bar{b}\right|^2=2\cdot 1+5\cdot 1\cdot 3\cdot\frac{1}{2}-3\cdot 9=-17{,}5$$

Пример 10. Найдите угол между векторами $\bar{a}=2\cdot\bar{m}+4\cdot\bar{n}$ и $\bar{b}=\bar{m}-\bar{n}$, где $\bar{m}$ и $\bar{n}$ - единичные векторы и угол между векторами $\bar{m}$ и $\bar{n}$ равен 120°.

Решение. Имеем: $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}$, $\bar{a}=\sqrt{\bar{a}^2}$, $\bar{b}=\sqrt{\bar{b}^2}$

$$\bar{a}^2=\left(2\cdot\bar{m}+4\cdot\bar{n}\right)\cdot\left(2\cdot\bar{m}+4\cdot\bar{n}\right)=4\cdot\bar{m}^2+16\cdot\bar{m}\cdot\bar{n}+16\cdot\bar{n}^2=$$

$$=4+16\cdot\cos 120^0+16=4-16\cdot\frac{1}{2}+16=12$$

Значит $\bar{a}=\sqrt{12}$.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(2\cdot\bar{m}+4\cdot\bar{n}\right)\cdot\left(\bar{m}-\bar{n}\right)=2\cdot\bar{m}^2-4\cdot\bar{n}^2+2\cdot\bar{m}\cdot\bar{n}=$$

$$=2-4+2\cos 120^0=-2-1=-3$$

$$\bar{b}^2=\left(\bar{m}-\bar{n}\right)\cdot\left(\bar{m}-\bar{n}\right)=\bar{m}^2-2\cdot\bar{m}\cdot\bar{n}+\bar{n}^2=1+\frac{2}{2}+1=3$$

Значит $\bar{b}=\sqrt{3}$.

Окончательно имеем: $\cos\varphi=\dfrac{-3}{\sqrt{12\cdot 3}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\varphi=120^0$.

5.б. Векторное произведение.

Определение 21. *Векторным произведением* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}=\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$, или $\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$, определяемый следующими тремя условиями:

1) Модуль вектора $\bar{c}$ равен $\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. $\left|\bar{c}\right|=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\varphi$.

Отсюда следует, что модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах.

2) Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ($\bar{c}\perp\bar{a}$; $\bar{c}\perp\bar{b}$), т.е. перпендикулярен плоскости параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3) Вектор $\bar{c}$ направлен так, что если смотреть из его конца, то кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ был бы против часовой стрелки (векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют правую тройку).

Векторное произведение двух векторов, заданных своими проекциями.

Пусть даны векторы $\bar{a}=\bar{i}\,x_1+\bar{j}\,y_1+\bar{k}\,z_1$ и $\bar{b}=\bar{i}\,x_2+\bar{j}\,y_2+\bar{k}\,z_2$, тогда

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

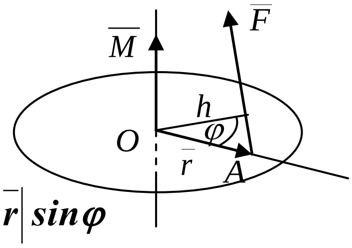
Если разложить определитель по элементам первой строки, то

$$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}+\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Механический смысл векторного произведения.

Пусть в точке A к диску приложена сила $\bar{F}$. Определить момент силы $\bar{F}$ относительно точки O на диске.

Пусть $\bar{r}=\overline{OA}$ - радиус-вектор точки приложения силы $\bar{F}$, h- плечо, т.е. расстояние от точки O до вектора силы $\bar{F}$, $\varphi=\bar{r}\wedge\bar{F}$ - угол между векторами $\bar{r}$ и $\bar{F}$, α- плоскость диска. Векторы $\bar{r}$ и $\bar{F}$ принадлежат диску (α).



$$\bar{M}\perp\bar{r}\qquad \bar{M}\perp\bar{F}\qquad \bar{M}\perp\alpha,\qquad |\bar{M}|=|\bar{F}|h=|\bar{F}||\bar{r}|\sin\varphi$$

Отсюда следует, что $\bar{M}=\bar{r}\times\bar{F}$.

Пример 11. Сила $\bar{F}=\{5,-3,-7\}$ приложена в точке $B(2,1,1)$. Определить момент силы относительно точки $K(2,3,4)$.

Решение. Образуем вектор $\overline{KB}=\{0,-2,-3\}$. Тогда момент относительно точки K вычисляется по формуле: $\bar{M}=мом_K\bar{F}=\overline{KB}\times\bar{F}$. Отсюда

$$\bar{M}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -2 & -3 \\ 5 & -3 & -7 \end{vmatrix}=\bar{i}(14-9)-\bar{j}15+\bar{k}10, \text{ или } \bar{M}=\{5,-15,10\}.$$

Свойства векторного произведения векторов.

1) Векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю.

$$\bar{a}\,||\,\bar{b}\qquad \left(|\bar{a}|\neq 0;\ |\bar{b}|\neq 0\right)\ \leftrightarrow\ \bar{a}\times\bar{b}=0.$$

2) Антикоммутативность: $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$.

3) Ассоциативность относительно скалярного множителя:

$$(\alpha\cdot\bar{a}\times\bar{b}=\alpha\cdot(\bar{a}\times\bar{b})).$$

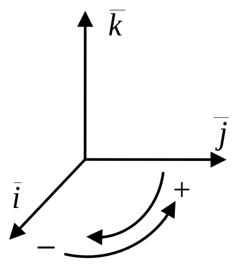
4) Дистрибутивность: $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$.

Таблица векторного умножения ортонормированного базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{j}\times\bar{j}=\bar{k}\times\bar{k}=0$$
$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}\quad \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}\quad \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}$$
$$\bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}\quad \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}\quad \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}.$$

Для запоминания можно воспользоваться круговым правилом:

Если перемещаться последовательно от одного к другому вектору против хода часовой стрелки, то следующий вектор надо



писать со знаком (+), а по ходу стрелки следующий вектор со знаком (-).

Пример 12. Даны точки $A(-3,1,2)$, $B(4,-3,2)$, $C(0,-1,3)$, $D(-6,2,1)$.

Найти векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{CD}$ и его модуль.

Решение. Найдем

$$\overline{AB}=\{4-(-3),-3-1,2-2\},\quad \overline{AB}=\{7,-4,0\},$$
$$\overline{CD}=\{-6-0,2-(-1),1-3\},\quad \overline{CD}=\{-6,3,-2\}$$

По формуле векторного произведения, имеем

$$\overline{AD}\times\overline{CD}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 7 & -4 & 0\\ -6 & 3 & -2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}7 & 0\\ -6 & -2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}7 & -4\\ -6 & -2\end{vmatrix}=8\bar{i}+14\bar{j}-3\bar{k}.$$

Таким образом, векторное произведение имеет координаты:

$\overline{AD}\times\overline{CD}=\{8,14,-3\}$, а его модуль

$$\left|\overline{AB}\times\overline{CD}\right|=\sqrt{8^2+14^2+(-3)^2}=\sqrt{269}.$$

Пример 13. Даны точки $A(-3,1,2)$, $B(4,-3,2)$, $C(0,-1,3)$.

Найти площадь треугольника $\Delta\, ABC$.

Решение. Найдем $\overline{AB}=\{7,-4,0\}$, $\overline{AC}=\{3,-2,1\}$.

Векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{AC}$ и его модуль найдем как.

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 7 & -4 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-4 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}7 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}7 & -4\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-4\bar{i}-7\bar{j}-2\bar{k},$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\{-4,-7,-2\},\ \left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{69}.$$

Применив формулу площади для треугольника $\Delta\, ABC$, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, запишем $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$. Отсюда получаем, что $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{69}$ (кв. ед.).

Пример 14. Найти $|\bar{c}|$, если $\bar{c}=(2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-4\bar{b})$, $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=3$, $\angle(\bar{a},\bar{b})=\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Используя свойства векторного произведения, упростим конструкцию вектора $\bar{c}$, а именно:

$$\bar{c}=(2\bar{a}+\bar{b})\times(\bar{a}-4\bar{b})=2\bar{a}\times\bar{a}-8\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{a}-4\bar{b}\times\bar{b}.$$

Так как $\bar{a}\,||\,\bar{a}$, $\bar{b}\,||\,\bar{b}$, то $\bar{a}\times\bar{a}=\bar{b}\times\bar{b}=0$. Следовательно,

$$\bar{c}=-8\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{a}=-9\bar{a}\times\bar{b}.$$

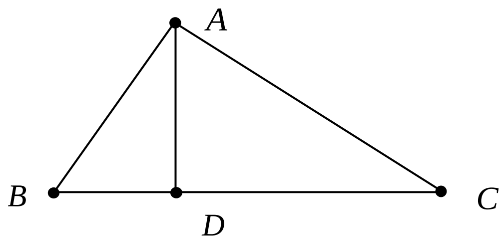
Теперь по формуле модуля векторного произведения, получаем

$$|\bar{c}|=\left|-9\bar{a}\times\bar{b}\right|=9\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=9|\bar{a}||\bar{b}|\sin\angle(\bar{a},\bar{b})=9\cdot1\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{6}=13{,}5.$$

Пример 15. Зная векторы $\overline{AB}(-3,-2,6)$ и $\overline{BC}(-2,4,4)$, вычислите длину высоты AD треугольника $\Delta\, ABC$ (см. рис).

Решение. Обозначая площадь треугольника $\Delta\, ABC$ через S, получим:

$$S=\frac{\left|\overline{BC}\right|\cdot\left|\overline{AD}\right|}{2}.$$ Тогда $$\left|\overline{AD}\right|=\frac{2\cdot S}{\left|\overline{BC}\right|},$$



$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{\overline{BC}^{\,2}}=\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}=6.$$ С другой стороны, площадь треугольника определяется через векторное произведение как:

$$S=\frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|}{2}.$$

Длину стороны $\overline{AC}$ найдем из равенства: $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$. Значит, вектор $\overline{AC}$ имеет координаты $\overline{AC}(-5,2,10)$.

$$\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -3 & -2 & 6\\ -5 & 2 & 10\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot(-20-12)-\bar{j}\cdot(-30+30)+\bar{k}\cdot(-6-10)=-16(2\bar{i}+\bar{k})$$

.

Следовательно, модуль этого векторного произведения равен:

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{16^2\left(2^2+1\right)}=16\sqrt{5};\; S=8\sqrt{5},$$

Откуда

$$\left|\overline{AD}\right|=\frac{16\sqrt{5}}{6}=\frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Пример 16. Даны два вектора $\bar{a}(11,10,2)$ и $\bar{b}(4,0,3)$. Найдите единичный вектор $\bar{c}$, ортогональный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ была правой.

Решение. Обозначим координаты вектора $\bar{c}$ относительно данного правого ортонормированного базиса через x, y, z.

Поскольку $\bar{c}\perp\bar{a}$, и $\bar{c}\perp\bar{b}$, то $(\bar{c}\cdot\bar{a})=0$, $(\bar{c}\cdot\bar{b})=0$. По условию задачи требуется, чтобы $\left|\bar{c}\right|=1$ и $\bar{a}\bar{b}\bar{c}>0$.

Имеем систему уравнений для нахождения x, y, z:

$$\begin{cases}(\bar{c}\cdot\bar{a})=0 & \to \quad 11x+10y+2z=0\\ (\bar{c}\cdot\bar{b})=0 & \to \quad 4x+3z=0\\ \left|\bar{c}\right|=1 & \to \quad x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

Из второго уравнения системы получим: $z=-\dfrac{4}{3}x$. Подставим в первое

$$11x+10y-2\frac{4}{3}x=0 \quad\rightarrow\quad \frac{33}{3}x-\frac{8}{3}x=-10y \quad\rightarrow\quad y=-\frac{25}{30}x$$

$y=-\dfrac{5}{6}x$.

Подставляя y и z в третье уравнение, будем иметь: $x^2=\dfrac{36}{125}$, откуда $x=\pm\dfrac{6}{5\sqrt{5}}$.

Используя условие $\bar{a}\bar{b}\bar{c}>0$, получим неравенство

$$\begin{vmatrix} 11 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}>0 \quad\rightarrow\quad 11\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ y & z \end{vmatrix}-10\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ x & z \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ x & y \end{vmatrix} \;>\; 0$$

Или

$$-11\cdot 3\cdot y-10\cdot(4z-3x)+2\cdot 4\cdot y \;>\; 0 \quad\rightarrow\quad -33y-40z+30x+8y=30x-25y-40z>0$$

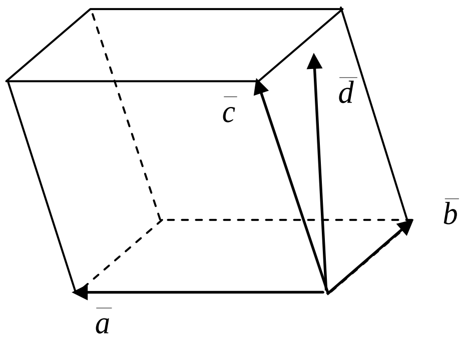
Отсюда

$$5(6x-5y-8z)>0$$

С учетом выражений для y и z перепишем полученное неравенство в виде: $\dfrac{625}{6}x>0$, откуда следует, что $x>0$. Итак, $x=\dfrac{6}{5\sqrt{5}}$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $z=-\dfrac{8}{5\sqrt{5}}$.

5.в. Смешанное произведение трех векторов.

Определение. *Смешанным произведением* трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется векторное произведение двух векторов $\bar{a}\times\bar{b}$, скалярно умноженное на третий вектор $\bar{c}$: $\left([\bar{a}\times\bar{b}]\cdot\bar{c}\right)=\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$



Смешанное произведение есть скалярная величина, по модулю численно равная объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах.

Пусть $\bar{d}=\bar{a}\times\bar{b}$, тогда

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\left(\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right)=\bar{d}\cdot\bar{c}=\left|\bar{d}\right|\cdot np_{\bar{d}}\,\bar{c}=\pm V$$

$V_{\text{параллелепипеда}}$, где “+” означает, что $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют правую тройку, а “-“ –левую тройку. Отсюда получаем, что

$$V_{\text{параллепип еда}}=\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right|;\; V_{\text{тетраэдра}}=\frac{1}{6}\left|\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)\right|.$$

Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами.

Если перемножаемые векторы заданы их разложением по ортам:

$$\bar{a}=\bar{i}\,x_1+\bar{j}\,y_1+\bar{k}\,z_1,\quad \bar{b}=\bar{i}\,x_2+\bar{j}\,y_2+\bar{k}\,z_2,\quad \bar{c}=\bar{i}\,x_3+\bar{j}\,y_3+\bar{k}\,z_3$$

то их смешанное произведение будет равно определителю третьего порядка:

$$\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения.

1) Если в смешанном произведении перемножаемые векторы переставить в круговом порядке, то произведение не изменится:
$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)\cdot\bar{a}=\left(\bar{c}\times\bar{a}\right)\cdot\bar{b}$.

2) Если в смешанном произведении поменять местами знаки векторного и скалярного умножения, то произведение не изменится:
$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$.

Это свойство позволяет записывать смешанное произведение в виде $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ без знаков векторного и скалярного умножения.

3) Перестановка в смешанном произведении любых двух векторов изменит лишь его знак:

$$\left(\bar{a},\bar{c},\bar{b}\right)=-\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right); \qquad \left(\bar{b},\bar{a},\bar{c}\right)=-\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right); \qquad \left(\bar{c},\bar{b},\bar{a}\right)=-\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$$

4) Смешанное произведение обращается в нуль, если:

а) хотя бы один из перемножаемых векторов есть нуль- вектор;

б) два из перемножаемых векторов коллинеарные;

в) три перемножаемые вектора компланарны;

Заметим, что случай в) содержит в себе и оба предыдущих: Если хотя бы один из трех векторов есть нуль-вектор или два из них коллинеарны, то все три вектора будут компланарны, следовательно,

$$\bar{a},\bar{b},\bar{c}\text{-компланарны} \Leftrightarrow \left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 17. Даны точки $A(-3,1,2)$, $B(4,-3,2)$, $C(0,-1,3)$, $D(-6,2,1)$.

Определить лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости.

Решение. Точки будут лежать в одной плоскости, если три вектора, соединяющие эти точки, являются компланарными. Составим, например, вектора $\overline{AB}=\{7,-4,0\}$, $\overline{AC}=\{3,-2,1\}$, $\overline{AD}=\{-3,1,-1\}$ и найдем их смешанное произведение:

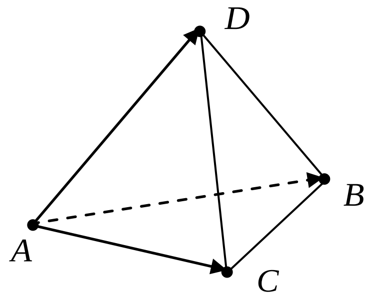
$$\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=7\cdot 1+4\cdot 0=7,$$

Поскольку $\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right)\neq 0$, то вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ не компланарны, а стало быть, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Пример 18. Даны точки $A(-3,1,2)$, $B(4,-3,2)$, $C(0,-1,3)$, $D(-6,2,1)$. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6}$ части объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, и вычисляется он по формуле:

$$V_{пир} = \frac{1}{6} V_{пар} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right)\right|$$



Эти три вектора имеют координаты:

$\overline{AB} = \{7,-4,0\}$, $\overline{AC} = \{3,-2,1\}$,

$\overline{AD} = \{-3,1,-1\}$. Их смешанное произведение будет равно:

$$\left(\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot 1 + 4\cdot 0 = 7$$

Отсюда получим $V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot 7 = \frac{7}{6}$ (куб.ед.).

Понятие вектора обобщают и на случай n - мерного пространства, только уже не физического, а, например, пространство товаров, услуг и т.д.

В этом случае под вектором понимают упорядоченную совокупность $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n - вещественных чисел и называют ее n - *мерным вектором*, а числа $x_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ - *компонентами,* или *координатами,* вектора.

Если, например, некоторый автомобильный завод должен выпустить в смену 50 легковых автомобилей, 100 грузовых, 10 автобусов, 50 комплектов запчастей для легковых автомобилей и 150 комплектов для грузовых автомобилей и автобусов, то производственную программу этого завода можно записать в виде вектора $(50{,}100{,}10{,}50{,}150)$, имеющего пять компонент.

В этом случае *произведением* вектора $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на действительное число λ называется вектор $\lambda\cdot\overline{x} = (\lambda\cdot x_1, \lambda\cdot x_2, \ldots, \lambda\cdot x_n)$.

Суммой векторов $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется вектор $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

Кроме того, *N-мерное векторное пространство* R^n определяется как множество всех n - мерных векторов, для которых определены операции умножения на действительные числа и сложение.

Экономическая иллюстрация n - мерного векторного пространства: *пространство благ* (*товаров*). Под *товаром* мы будем понимать некоторое благо или услугу, поступившие в продажу в определенное время в определенном месте. Предположим, что существует конечное число наличных товаров n. Количества каждого из них, приобретенные потребителем, характеризуются набором товаров

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где через x_i обозначается количество i - го блага, приобретенного потребителем. Будем считать, что все товары обладают свойством произвольной делимости, так что может быть куплено любое неотрицательное количество каждого из них. Тогда все возможные наборы товаров являются векторами пространства товаров $C = \left\{ \bar{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n \right) \; x_i \geq 0, i = \overline{1,n} \right\}$.

Аналитическая геометрия

Предмет аналитической геометрии - это изучение геометрических образов с помощью алгебры (их положение, вид, а не размеры). Точка – исходный элемент, все остальное – совокупность точек.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ В R_2

1. Понятие об уравнении линии на плоскости.

Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости, определяемую ортонормированным базисом $\bar{i}$, $\bar{j}$ и точкой $O(0,0)$ – началом координат. Пусть на плоскости дана какая-нибудь линяя.

Определение 1. Уравнением данной линии (в выбранной системе координат) называется такое уравнение

$$F(x, y) = 0$$

с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

Пример. 1) $y = x$ или $x - y = 0$ уравнение биссектрисы I и III координатных углов (рис. 1).

2) Уравнение окружности с центром в начале координат радиуса R (рис. 2.):

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

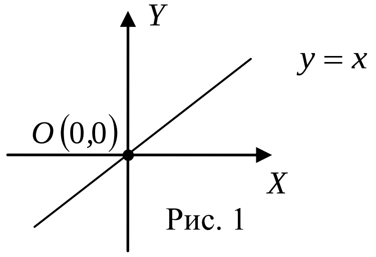


Рис. 1

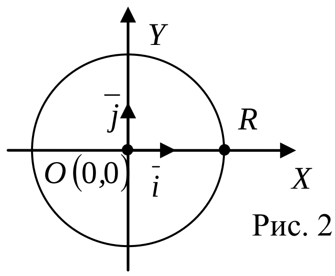


Рис. 2

Произвольную точку на линии называют текущей точкой. В дальнейшем, рассматривая уравнения с двумя переменными, мы не исключаем возможности, что левая часть уравнения содержит еще и другие символы: a, b, R и т.д., но в таком случае мы будем предполагать, что они представляют собой фиксированные числа, и будем называть их постоянными параметрами уравнения. Например, в уравнении:

$$y = kx + b$$

параметрами являются k и b, а в уравнении окружности:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

параметр - радиус R и координаты центра $O(0,0)$.

Составить уравнение линии (или, вообще говоря, геометрического образа), значит, исходя из свойств линии, установить зависимость между координатами текущей точки и параметрами. Этот метод позволяет свести изучение линий к изучению их уравнений, т.е. задачи геометрии свести к задачам алгебры.

Основным предметом изучения в аналитической геометрии являются линии, определяемые по отношению к декартовым прямоугольным координатам алгебраическими уравнениями. Это суть уравнения следующих видов:

$$A\,x + B\,y + C = 0 \qquad\qquad A^2 + B^2 \neq 0 \tag{1}$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad\qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \tag{2}$$

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Ly + K = 0$$
$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 \neq 0 \tag{3}$$

Уравнения (1), (2), (3) соответственно общие уравнения 1-ой, 2-ой, 3-ей степени.

Определение 2. Линия, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется алгебраическим уравнением степени n, называется алгебраической линией $n - го$ порядка.

2. Прямая линия на плоскости

Вектор $\overline{n}\left(A, B\right)$ - перпендикулярный прямой, назовем ***нормальным вектором*** прямой, а вектор $\overline{a}\left(m, n\right)$, параллельный прямой, назовем ***направляющим вектором*** (рис. 3.). Пусть α - угол между прямой и положительным направлением оси OX, угол наклона прямой, $tg\alpha = k$ - угловой коэффициент прямой.

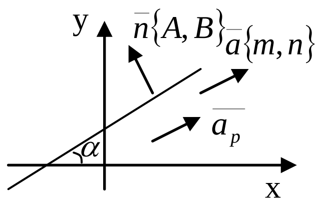


Рис. 3.

Вектор $\overline{a_p}\left(1, k\right)$ назовем приведенным направляющим вектором.

Типы уравнений прямой.

Название уравнения определяется названием постоянных величин, определяющих положение прямой линии в системе координат.

1) ***Уравнение прямой линии, проходящей через данную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$, перпендикулярно данному вектору*** $\overline{n}$ имеет вид:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0 \tag{1}$$

Оно вытекает из условия того, что скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. Действительно, возьмем на прямой произвольную точку $M\left(x, y\right)$. Образуем текущий вектор $\overline{a}$, направленный из точки $M\left(x, y\right)$ в точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Этот вектор будет иметь координаты $\overline{a} = \left\{\left(x - x_0\right), \left(y - y_0\right)\right\}$, и направлен он будет вдоль прямой. Второй вектор – это данный вектор $\overline{n} = \left\{A, B\right\}$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю, отсюда и вытекает уравнение прямой.

2) Общее уравнение прямой линии:

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

где коэффициенты при неизвестных A, B суть координаты нормального вектора прямой. Действительно, раскроем скобки в предыдущем уравнении:

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0 \quad \rightarrow \quad Ax + By + \left(- Ax_0 - By_0\right) = 0 \quad \rightarrow \quad Ax + By + C = 0$$

Теорема 1. Всякая прямая на плоскости имеет уравнение первой степени, и всякое уравнение первой степени является уравнением некоторой прямой.

Следствия.

а) $x = a$ – уравнение прямой, параллельной оси OY ($x = 0$, уравнение оси OY),

б) $y = b$ - уравнение прямой, параллельной оси OX ($y = 0$, уравнение оси OX), в) $y = k\,x$ - прямая линия, проходящая через начало координат.

Замечание. При переменном коэффициенте k - это будут уравнения пучка прямых, проходящих через начало координат.

3) Уравнение прямой линии, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, параллельно данному вектору $\overline{a}(m, n)$ (***каноническое***):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \tag{3}$$

Вектор вдоль прямой $\overline{a} = \{(x - x_0), (y - y_0)\}$ коллинеарен вектору $\overline{a}(m, n)$, отсюда это условие.

4) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{4}$$

Замечание. При переменном коэффициенте k уравнение называется уравнением пучка прямых линий, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$.

5) Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом (рис. 4):

$$y = kx + b \tag{5}$$

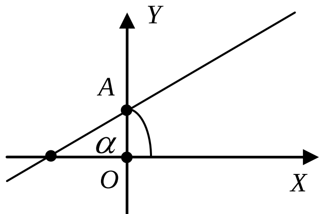


Рис. 4

Здесь $b = OA, \quad k = tg\alpha \qquad (\alpha \neq \frac{\pi}{2})$. К этому виду нельзя привести прямую, параллельную оси OY.

6) Уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \tag{6}$$

Действительно, пусть даны две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, через которые должна пройти наша прямая. На этой прямой возьмем текущую точку $M(x, y)$ и образуем два вектора: $\overline{a} = \{(x - x_0), (y - y_0)\}$ и $\overline{b} = \{(x_1 - x_0), (y_1 - y_0)\}$. Эти два вектора коллинеарные, отсюда и вытекает уравнение.

Замечание. Если $x_1 = x_0$, то уравнение прямой $x = x_1$; если $y_1 = y_0$, то $y = y_0$.

3. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности.

1) Пусть прямые линии заданы общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C = 0 \qquad A_2x + B_2y + C = 0 \ ,$$

где нормальные векторы: $\overline{n}_1(A_1, B_1)$ и $\overline{n}_2(A_2, B_2)_2$, φ - угол между векторами $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, т.е. угол между прямыми. Тогда:

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}||\overline{n_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{7}$$

Условие параллельности прямых эквивалентно условию коллинеарности их нормальных векторов:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \tag{8}$$

Условие перпендикулярности прямых – ортогональность векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$:

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \tag{9}$$

2) Пусть прямые линии заданы с угловыми коэффициентами k_1 *и* k_2 (рис. 5): $y=k_1x+b_1$ *и* $y=k_2x+b_2$,

где $k_1=tg\alpha_1$ $k_2=tg\alpha_2$. Тогда

$$tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

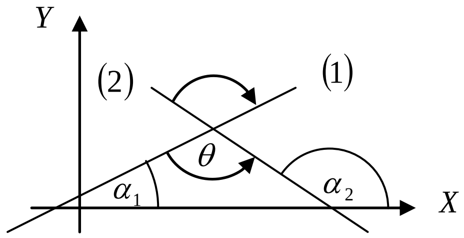


Рис. 5

Это вытекает из формулы тангенса суммы углов.

$\theta+\alpha_1+(\pi-\alpha_2)=\pi$, $\theta+\alpha_1-\alpha_2=0$,

$\theta=\alpha_1+\alpha_2$, $tg\theta=tg(\alpha_1+\alpha_2)$,

$$tg\theta=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2} \qquad (*).$$

За k_1 принимаем угловой коэффициент той прямой, которую надо вращать против хода часовой стрелки, чтобы обойти угол θ до совмещения со второй прямой.

Условие параллельности прямых: $k_1=k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_2=\frac{-1}{k_1}$.

Расстояние точки $M_0(x_0,y_0)$ от прямой $Ax+By+C=0$ определяется формулой:

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \tag{10}$$

Доказательство смотри в другом файле.

Замечания.

1. Если две прямые L_1 и L_2 заданы в каноническом виде, то угол между ними можно рассматривать как угол между их направляющими векторами $\overline{a_1}=\{m_1,n_1\}$, $\overline{a_2}=\{m_2,n_2\}$, а значит,

$$cos\alpha=cos(\angle\overline{a}_1,\overline{a}_2)=\frac{\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2}{|\overline{a}_1|\cdot|\overline{a}_2|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2}} \tag{11}$$

2. Если прямые линии заданы уравнением с угловым коэффициентом, то угол между ними можно вычислить по формуле (*).

Пример 1. Даны точки $A(-1,2)$, $B(0,-2)$, $C(2,4)$.

Найти:

1) Уравнение прямой AB.

Согласно уравнению (6) (уравнение прямой, проходящей через две точки), запишем:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-4}, \quad \text{или} \quad 4x+y+2=0.$$

2) Уравнение прямой L_1, проходящей через точку C, параллельно прямой AB.

Согласно уравнению (1), (уравнение прямой, проходящей через точку параллельно данному вектору) точка $M_0(x_0, y_0)$ это точка $C(2,4)$, параллельно прямой AB значит перпендикулярно ее нормальному вектору $\overline{n}=\{4,1\}$. Следовательно, запишем

$$4\cdot(x-2)+1\cdot(y-4)=0 \quad \to \quad 4x+y-12=0.$$

3) Уравнение прямой L_2, проходящей через точку C, перпендикулярно прямой AB.

Перпендикулярно прямой, значит параллельно ее нормальному вектору, в нашем случае $\overline{n}=\{4,1\}$. Точка $M_0(x_0, y_0)$ это точка $C(2,4)$. Согласно уравнению (3), запишем

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-4}{1} \to \quad x-2=4y-16 \quad \to \quad x-4y+14=0$$

4) Уравнение медианы AD треугольника $\Delta\, ABC$.

На медиане AD образуем текущий вектор $\overline{AM}(x+1, y-2)$.

Найдем координаты точки D - середины стороны BC:

$$x_D=\frac{0+2}{2}=1, \qquad y_D=\frac{-2+4}{2}=1, \qquad D=(1,1)$$

Образуем вектор $\overline{AD}(2,-1)$, расположенный параллельно текущему вектору $\overline{AM}$. Тогда, в силу условия параллельности векторов, получим уравнение медианы AD:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}, \quad \text{или} \quad x+2y-3=0.$$

5) Уравнение высоты BH.

На высоте BH возьмем текущую точку $M(x,y)$ и образуем текущий вектор $\overline{BH}(x-0, y+2)$. Так как $\overline{BH}\perp\overline{AC}$, где $\overline{AC}(3,2)$, то условие перпендикулярности этих векторов порождает уравнение прямой BH (скалярное произведение векторов равно нулю):

$$3(x-0)+(y+2)=0 \quad \text{или} \quad 3x+2y+4=0.$$

6) Длину высоты BH.

Заметим, что длина высоты BH равна расстоянию от точки B до прямой AC. Чтобы воспользоваться формулой (10), сначала найдем уравнение прямой AC.

На стороне AC образуем текущий вектор $\overline{AM}(x+1, y-2)$.

Запишем условие параллельности векторов $\overline{AM}\,||\,\overline{AC}$, где $\overline{AC}(3,2)$:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{2}, \quad \text{или в общем виде} \quad 2x-3y+8=0.$$

Теперь, подставляя известные данные в формулу (10), имеем:

$$d=\frac{|2\cdot 0-3\cdot(-2)+8|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{14}{\sqrt{13}}.$$

Пример 2. Дана прямая L_1: $x-2y-3=0$ и точка $A(-1, 2)$.

Найти:

1) Для прямой L_1 уравнение с угловым коэффициентом, угловой коэффициент k, отрезок, отсекаемый по оси ординат.

Разрешив уравнение прямой L_1 относительно Y, получаем уравнение с угловым коэффициентом:

L_1: $y = 0{,}5x - 1{,}5$. Отсюда $k = 0{,}5$, $b = -1{,}5$.

2) Нормаль $\overline{n_1}$ и направляющий вектор $\overline{a_1}$ прямой L_1 - $x - 2y - 3 = 0$.

Коэффициенты при переменных x, y в общем уравнении прямой L_1, есть координаты нормального вектора, то есть $\overline{n_1}(1,-2)$.

Поскольку направляющий вектор $\overline{a_1}(l,m)$ прямой L_1 – это любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой, то выполняется условие (перпендикулярность векторов):

$$\bar{a} \cdot \bar{n} = 0 = 1 \cdot l - 2 \cdot m \quad \text{где} \quad l^2 + m^2 \neq 0.$$

Дадим величине m какое-нибудь значение. Пусть, например, $m = 1$, тогда $l - 2 = 0$, то есть $l = 2$. Получаем направляющий вектор $\overline{a_1}(2,1)$.

3) Каноническое уравнение прямой L_1.

Для составления канонического уравнения (3) прямой L_1 нам необходимо знать точку M_0, лежащую на L_1, и направляющий вектор $\overline{a_1}$. Так как координаты вектора $\overline{a_1} = (2,1)$ были получены нами ранее в задание 2, осталось найти координаты точки M_0.

Зафиксируем произвольное значение, например, $y = 0$ и подставим его в уравнение прямой L_1. Получим $x = 3$. Следовательно, $M_0(3,0)$.

Воспользовавшись теперь каноническим уравнением прямой (10), находим:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-0}{1}.$$

4) Уравнение прямой L_2, параллельной L_1 - $x - 2y - 3 = 0$ и проходящей через точку $A(-1,2)$.

Прежде всего, заметим, что точка A не лежит на прямой L_1, поскольку ее координаты не удовлетворяют уравнению этой прямой. Поэтому можно построить прямую L_2, проходящую через A параллельно L_1, но не совпадающую с L_1.

Пусть $M(x,y)$ - текущая точка прямой L_2. Так как текущий вектор $\overline{AM}(x+1, y-2)$ перпендикулярен вектору нормали $\overline{n_1}(1,-2)$ прямой L_1, то $\overline{AM} \cdot \overline{n_1} = 0$. Отсюда получаем уравнение прямой L_2:

$$1 \cdot (x+1) - 2 \cdot (y-2) = 0 \quad \text{или} \quad x - 2y + 5 = 0$$

5) уравнение прямой L_3, перпендикулярной L_1 - $x - 2y - 3 = 0$ и проходящей через точку $A(-1,2)$.

Пусть $\overline{AM}(x+1, y-2)$ - текущий вектор прямой L_3. Из условия параллельности $\overline{AM}$ и нормали $\overline{n_1}(1,-2)$ прямой L_1, получаем уравнение L_3:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2}.$$

Пример 3. Проверить, являются ли прямые линии

$$L_1: \quad 2x+y-4=0, \qquad L_2: \quad \frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{3}$$

а) Параллельными.

Прямые L_1 и L_2 будут параллельны, если их нормали $\overline{n_1}\,||\,\overline{n_2}$. Из общего уравнения прямой L_1 найдем нормаль $\overline{n_1}(2,1)$. Чтобы найти нормаль $\overline{n}_2$ приведем уравнение прямой L_2 к общему виду: $3x+y+5=0$. Отсюда $\overline{n_2}=(3,1)$.

Поскольку условие параллельности векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n}_2$ не выполняется, так как $\frac{2}{3}\neq\frac{1}{1}$, стало быть, L_1 и L_2 не параллельны.

б) Перпендикулярными.

Прямые L_1 и L_2 будут перпендикулярны, если $\overline{n_1}\perp\overline{n}_2$. Но условие перпендикулярности для векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n}_2$ не выполняется, так как $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=2\cdot3+1\cdot1=7\neq0$. Следовательно, L_1 не перпендикулярна L_2.

в) Найти угол α между L_1 и L_2.

Угол между прямыми равен углу между их нормалями. Поэтому, используя формулу угла между двумя векторами, получим

$$\cos\alpha=\cos\left(\angle\overline{n}_1,\overline{n}_2\right)=\frac{\overline{n}_1\cdot\overline{n}_2}{\left|\overline{n}_1\right|\cdot\left|\overline{n}_2\right|}.$$

Так как $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=7$, $\left|\overline{n_1}\right|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\left|\overline{n_2}\right|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, то $\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАЗЫ В R₃

4. Понятие алгебраической поверхности.

Определение. Алгебраической поверхностью называется множество, которое в какой-нибудь декартовой системе координат может быть задано уравнением вида:

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1}+\ldots+A_sx^{k_s}y^{l_s}z^{m_s}=0$$

где все показатели степени – целые неотрицательные числа. Наибольшая из сумм: $k_1+l_1+m_1,\ \ldots,\ k_s+l_s+m_s$ называется степенью уравнения, а также периодом алгебраической поверхности. Это определение означает, в частности, что сфера является алгебраической поверхностью второго порядка.

Перейдем к рассмотрению конкретных линейных образов в пространстве R_3.

4.а. Плоскость.

1. ***Уравнение плоскости (α), проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, перпендикулярно данному вектору $\overline{n}\{A;B;C\}$*** (рис. 6).

$M(x,y,z)$ - текущая точка плоскости (α). Вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}\in\alpha$.

Для любой точки плоскости векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{n}$ ортогональны, следовательно, их скалярное произведение равно 0.

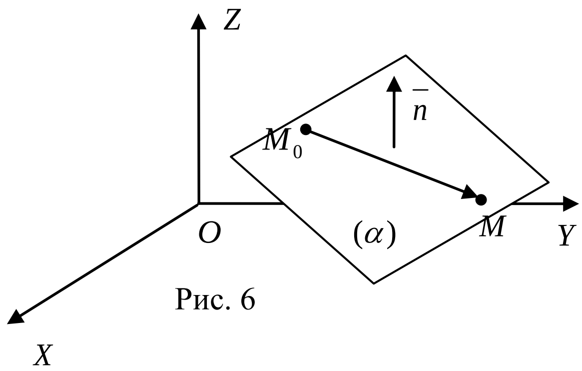


Рис. 6

$$(\overline{M_0 M} \cdot \overline{n}) = 0.$$

В уравнении перейдём к координатной форме:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (12)$$

Уравнение (12) называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.

2. Общее уравнение плоскости - это уравнение $1-$*ой* степени с неизвестными x, y, z, которое имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (13)$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки (рис. 7).

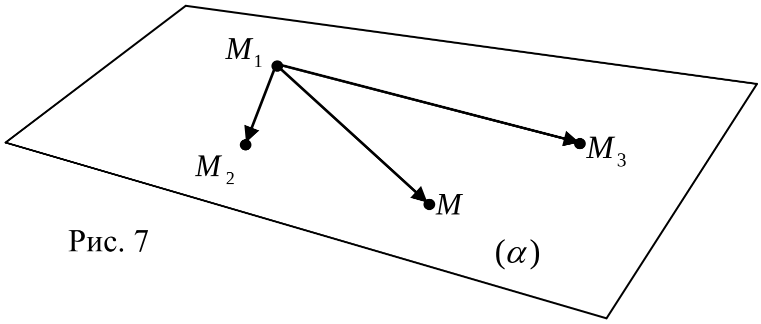


Рис. 7

Пусть плоскости (α) принадлежат три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. $M(x, y, z)$ - текущая точка плоскости, тогда векторы $\overline{M_1 M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overline{M_1 M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ компланарны и, следовательно, смешанное произведение этих векторов равно нулю.

$$(\overline{M_1 M} \cdot \overline{M_1 M_2} \cdot \overline{M_1 M_3}) = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

4. Уравнение плоскости «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (15)$$

где a, b, c – величины отрезков, отсекаемых плоскостью от начала координат на осях координат (рис. 8).

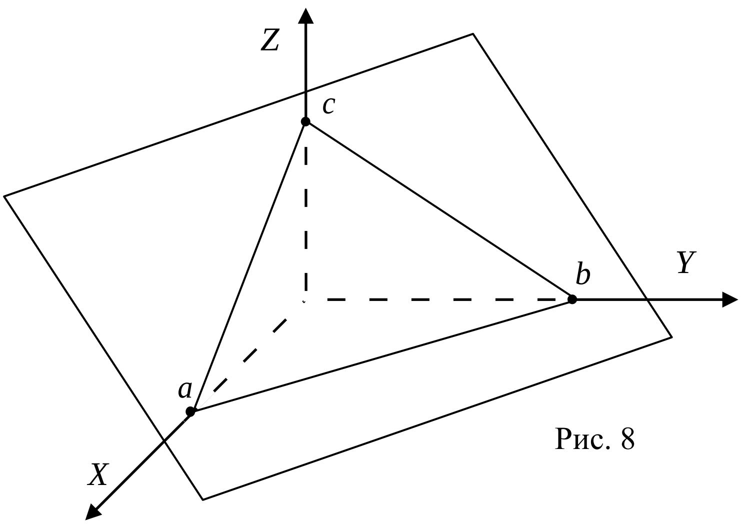


Рис. 8

5. Расстояние точки от плоскости.

Дана плоскость (α) - $Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ вне плоскости, тогда расстояние d точки M_0 от плоскости (α) имеет вид:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad (16)$$

6. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей (рис. 9).

Даны две плоскости:

$$\alpha_1 \to A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и}$$

$$\alpha_2 \to A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

и $\overline{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$; $\overline{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$ - нормальные векторы к соответствующим данным плоскостям.

За угол между двумя плоскостями принимается угол между их нормальными векторами:

$$cos\varphi = \frac{(\overline{n_1} \cdot \overline{n_2})}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (17)$$

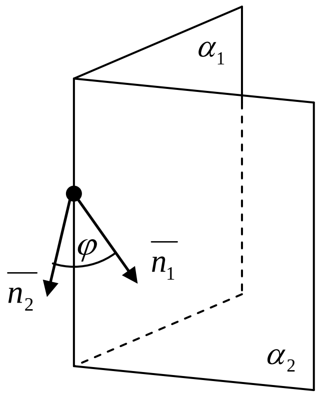


Рис. 9

Если плоскости параллельны, то векторы $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ коллинеарны, и, следовательно,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (18)$$

условие параллельности двух плоскостей.

Если плоскости перпендикулярны, то

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow cos\varphi = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (19)$$

условие перпендикулярности двух плоскостей.

5. Прямая линия в пространстве.

Прямую линию в пространстве можно представить как пересечение двух плоскостей, то есть совокупность двух уравнений плоскостей. Систему двух непараллельных уравнений (плоскостей) называют общими уравнениями прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

5.а. Канонические уравнения прямой в пространстве.

Каждый не равный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется направляющим вектором данной прямой и обозначается: $\overline{a}(m, n, p)$.

Если известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямой и направляющий вектор $\overline{a}(m, n, p)$, то прямая может быть определена (двумя) уравнениями вида:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \qquad (20)$$

которые называются каноническими уравнениями прямой.

Канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}. \qquad (21)$$

Обозначив буквой t каждое из равных отношений в канонических уравнениях, мы получим: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$. Отсюда

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}. \qquad (22)$$

Уравнения (3) есть параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, параллельно вектору $\bar{a}(m,n,p)$. В уравнениях (3) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр; x,y,z - как функции от t. При изменении t величины x,y,z меняются так, что точка $M(x,y,z)$ движется по данной прямой.

5.б. Приведение общих уравнений прямой к каноническому виду.

Пусть прямая линия задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}, \qquad (23)$$

где $\bar{n}_1(A_1,B_1,C_1)$, $\bar{n}_2(A_2,B_2,C_2)$ – нормальные векторы заданных плоскостей .

Выберем на прямой определенную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Для этого, например, z_0 зададим произвольно, а x_0 и y_0 получим из системы (23).

В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\bar{a}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2$:

$$\bar{a}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}+\bar{j}\cdot\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, каноническое уравнения прямой, соответствующее системе (23), имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (24)$$

6. Угол между двумя прямыми.

Под углом между прямыми принимается угол между их направляющими векторами. Рассмотрим две прямые:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

Здесь $\bar{a}_1(m_1,n_1,p_1)$, $\bar{a}_2(m_2,n_2,p_2)$ – направляющие вектора данных прямых:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{\left|\overline{a_1}\right|\cdot\left|\overline{a_2}\right|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (25)$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (26)$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0 \qquad (27)$$

Пример 4. Составить каноническое уравнение прямой L, проходящей через две заданные точки: $A(1,-2,1)$, $B(3,1,-1)$.

Согласно формуле (21) запишем:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Пример 5. Составить уравнение прямой L_1, проходящей через точку $A(1,-1,2)$ параллельно прямой L_2:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{0}$$

Решение. На прямой L_1 образуем текущий вектор $\overline{AM}(x-1, y+1, z-2)$. Из канонического уравнения прямой L_2 находим направляющий вектор $\overline{a_2}(5,-2,0)$, здесь $m=5, \quad n=-2, \quad p=0$. Так как $L_1 \| L_2$, то $\overline{a_2} \| \overline{AM}$ для любой точки $M(x,y,z) \in L_1$. Используя теперь условие параллельности, получаем канонические уравнения прямой L_1:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{0}.$$

Пример 6. Известны уравнения двух прямых:

$$L_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}, \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 5z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Проверить, являются ли L_1 и L_2 параллельными.

b) Проверить, являются ли L_1 и L_2 перпендикулярными.

c) Найти угол φ между прямыми L_1 и L_2.

Решение.

а) Из условия параллельности прямых имеем, $L_1 \| L_2$, если их направляющие вектора $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ параллельны. Координаты вектора $\overline{a_1}$ легко получаются из заданных канонических уравнений прямой L_1: $\overline{a_1}(-1,3,1)$. Для прямой L_2, определяемой пересечением плоскостей, направляющий вектор $\overline{a_2}$ находится как векторное произведение: $\overline{a_2} = \overline{n_1} \times \overline{n_2}$, где $\overline{n_1}(1,-1,0)$, $\overline{n_2}(2,1,-5)$.

Вычисляем,

$$\overline{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 5\bar{i} + 5\bar{j} + 3\bar{k}, \qquad \overline{a}_2(5,5,3).$$

Так как координаты векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ не пропорциональны, то условие параллельности для векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ не выполняется, а значит, L_1 не параллельна L_2.

b) Из условия перпендикулярности прямых, $L_1 \perp L_2$, если $\overline{a_1} \perp \overline{a_2}$. Так как $\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 13$, то условие перпендикулярности векторов $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ не выполняется. Стало быть, L_1 не перпендикулярна к L_2.

c) Угол между прямыми найдем по формуле (25):

$$cos\varphi = \frac{13}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{59}}.$$

Пример 7. Привести к каноническому виду уравнения прямой:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

Найдем направляющий вектор прямой $\overline{a}$:

$$\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -8\overline{i} - 7\overline{j} - 5\overline{k}, \qquad \overline{a}(-8,-7,-5).$$

За точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через которую проходит искомая прямая в уравнении (20), можно принять точку пересечения ее с любой из координатных плоскостей, например с плоскостью YOZ. Так как при этом $x_0 = 0$, то координаты y_0, z_0 определяются из заданного уравнения прямой, если в нем положить $x = 0$:

$$\begin{cases} y - 3z = 0 \\ -3y + z - 1 = 0 \end{cases}.$$

Откуда находим $z_0 = \frac{-1}{8}$, $y_0 = \frac{-3}{8}$ и $M_0\left(0, \frac{-1}{8}, \frac{-3}{8}\right)$.

Итак, воспользовавшись теперь общей формулой (20), получаем:

$$\frac{x}{-8} = \frac{y + 3/8}{-7} = \frac{z + 1/8}{-5}.$$

7. Прямая и плоскость.

1) Угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 11).

Пусть даны плоскость (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормальным вектором $\overline{n}(A, B, C)$ и прямая $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ с направляющим вектором $\overline{a}(m, n, p)$.

Угол между векторами $\overline{n}$ и $\overline{a}$ отличается от угла между прямой и плоскостью на $\frac{\pi}{2}$;

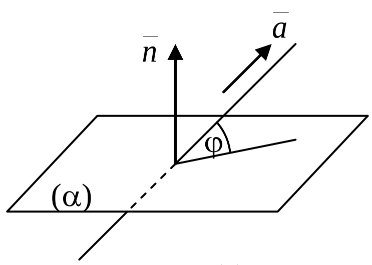


Рис. 11

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\varphi\right)=\frac{\left(\bar{n}\cdot\bar{a}\right)}{\left|\bar{n}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|}$$ или

$$sin\varphi=\pm\frac{A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \qquad (28)$$

2) Условие параллельности прямой и плоскости:

$$A\cdot m+B\cdot n+C\cdot p=0 \qquad (29)$$

3) Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \qquad (30)$$

Условие того, что прямая лежит в данной плоскости.

Пусть $Ax+By+Cz=0$ данная плоскость (α), $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ - каноническое уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, параллельно вектору $\bar{a}(m,n,p)$.

Условие принадлежности прямой плоскости (α) имеет вид:

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases} \qquad (31)$$

Если прямая лежит в плоскости, то она этой плоскости параллельна (первое уравнение) и любая точка прямой удовлетворяет уравнению плоскости (второе уравнение).

Условие того, что две прямые лежат в одной плоскости.

Пусть имеем две прямые:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Отсюда, направляющие вектора этих прямых $\bar{a}_1(m_1,n_1,p_1)$, $\bar{a}_2(m_2,n_2,p_2)$ и точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ лежат на соответствующих прямых. Если прямые лежат в одной плоскости, то векторы $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$, $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ компланарны. Условие того, что две прямые лежат в одной плоскости равносильно условию компланарности этих векторов: $\left(\overline{M_1M_2},\bar{a}_1,\bar{a}_2\right)=0$ или

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (32)$$

Условие (32) является также критерием пересечения двух прямых.

Замечание. Если заданы две прямые, то они могут быть в одном из трех следующих соотношений:

1) параллельны, $\Rightarrow$ $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$,

2) пересекаются, $\Rightarrow$
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

3) прямые (1) и (2) скрещиваются (рис. 12), следовательно, $\left(\overline{M_1M_2} \cdot \overline{a_1} \cdot \overline{a_2}\right) \neq 0$. Тогда возникает вопрос об определении расстояния между скрещивающимися прямыми, как высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{M_1M_2}, \overline{a_1}, \overline{a_2}$, как на сторонах:

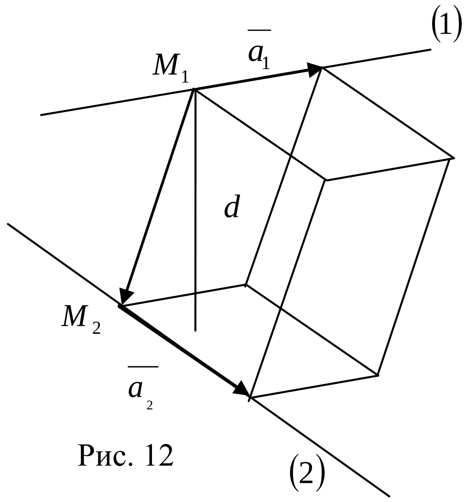


Рис. 12

$$d = \frac{\left|(\overline{M_1M_2} \cdot \overline{a_1} \cdot \overline{a_2})\right|}{\left|\overline{a_1} \times \overline{a_2}\right|}.$$

Пример 8. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-2,3)$ параллельно прямым $A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{-1} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = -3t + 1 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Решение.

На искомой плоскости образуем текущий вектор $\overline{AM}(x-1, y+2, z-3)$. Из канонического уравнения прямой L_1 и параметрического уравнения прямой L_2 получим координаты их направляющих векторов $\overline{a_1}(3, 4, -1)$ и $\overline{a_2}(1, -3, 0)$. Условие компланарности этих трех векторов $\left(\overline{AM}, \overline{a_1}, \overline{a_2}\right) = 0$ дает уравнение плоскости α:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 9. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2, 1, 0)$ и прямую L:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z + 1 = 0 \\ 3x - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Решение.

На искомой плоскости образуем текущий вектор $\overline{AM}(x+2, y-1, z)$.

Уравнение прямой задано пересечением плоскостей, поэтому ее направляющий вектор $\overline{a}$ определяется из равенств:

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 13\bar{j} + 6\bar{k}, \qquad \bar{a}(2,13,6).$$

Так как $\bar{a} || L$, $L \in \alpha$, то $\bar{a} \in \alpha$.

На прямой L зафиксируем произвольную точку B. Координаты B найдем из системы уравнений заданной прямой, положив в них, например, $x = 0$:

$$\begin{cases} -2y + 4z + 1 = 0 \\ -z + 2 = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $y = 4{,}5$, $z = 2$. Таким образом, $B(0;4{,}5;2)$. Соединив точки A и B, получим вектор $\overline{AB}(2;3{,}5;2)$, принадлежащий плоскости **α.**

Для любой точки $M(x,y,z) \in \alpha$ выполняется условие компланарности векторов $(\overline{AM}, \bar{a}, \overline{AB}) = 0$. И, так как

$\overline{AB}$ не параллелен $\bar{a}$, то уравнение плоскости дается равенством:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 2 & 13 & 6 \\ 2 & 3{,}5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Пример 10. Найти уравнение плоскости **α**, проходящей через прямые

$$L_1: \ \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-1} \quad \text{и} \quad L_2: \ \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{3}.$$

Решение.

Из канонического уравнения прямой L_1 найдем координаты некоторой точки A, расположенной на L_1: $A(1,0,-2)$ и, соединив ее с текущей точкой $M(x,y,z)$, образуем текущий вектор $\overline{AM}(x-1, y, z+2) \in \alpha$.

Из уравнений прямых получим направляющие вектора $\overline{a_1}(3,2,-1)$, $\overline{a_2}(1,-2,3)$, которые, как и прямые L_1, L_2, принадлежат плоскости α. Так как для любой точки $M(x,y,z) \in \alpha$ выполняется условие компланарности векторов $(\overline{AM}, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0$, а $\overline{a_1}$ не параллелен $\bar{a}_2$, то искомая плоскость описывается уравнением:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Остальные семь примеров в другом файле.

8. Кривые второго порядка.

Порядком алгебраического уравнения называется высшая степень входящего в уравнение неизвестного. Порядок кривой не зависит от выбора осей координат на плоскости.

Общий вид кривой 2-го порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

К кривым 2-го порядка относятся ***эллипс***, частным случаем которого является ***окружность***, ***гипербола и парабола***.

8.а Окружность

Пусть $c(a,b)$ – центр окружности радиуса R, тогда уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

8.б. Эллипс (в декартовой системе координат)

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами эллипса, постоянна и равна $2a$ (рис. 13).

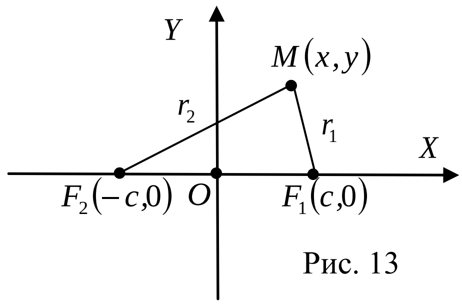


Рис. 13

Пусть фокусами эллипса являются точки F_1 и F_2, при этом $F_1F_2=2c$ есть фокальная ось эллипса. $M(x,y)$ – некоторая точка, принадлежащая эллипсу. По определению эллипса, для любой его точки $M(x,y)$, имеем:

$$MF_1+MF_2=2a$$

Пусть ось OX совпадает с фокальной осью F_1F_2. Начало координат выберем посередине между фокусами F_1 и F_2, а ось OY перпендикулярно фокальной оси. При таком выборе системы координат уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Действительно, согласно рисунку 13, $MF_1=\{(x-c),y\}$. Следовательно, $|MF_1|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Аналогично $|MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$. Отсюда, по определению,

$$2a=\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Преобразуем полученное уравнение эллипса.

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-2\cdot 2a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2xc+c^2=4a^2-2\cdot 2a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2$$

$$-2xc=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2xc$$

$$xc+a^2=a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2c^2+2xca^2+a^4=a^2\cdot(x+c)^2+a^2\cdot y^2$$

$$x^2c^2+2xca^2+a^4=a^2x^2+a^2 2xc+a^2c^2+a^2\cdot y^2$$

$$a^4-a^2c^2=a^2x^2-x^2c^2+a^2\cdot y^2 \quad\to\quad a^2\cdot(a^2-c^2)=x^2\cdot(a^2-c^2)+a^2\cdot y^2$$

Отсюда получаем искомое уравнение эллипса.

Так как из ΔF_1MF_2 следует, что $2a>2c$ т.е. $a>c$, то полагают $a^2-c^2=b^2$ и получают ***каноническую*** (простейшую) ***форму уравнения эллипса:***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (33)$$

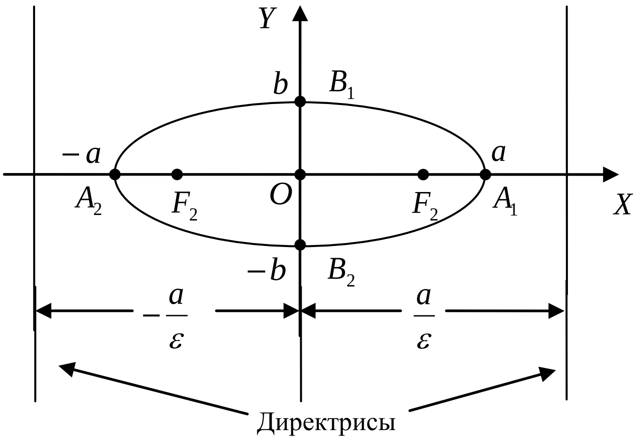


Рис. 14

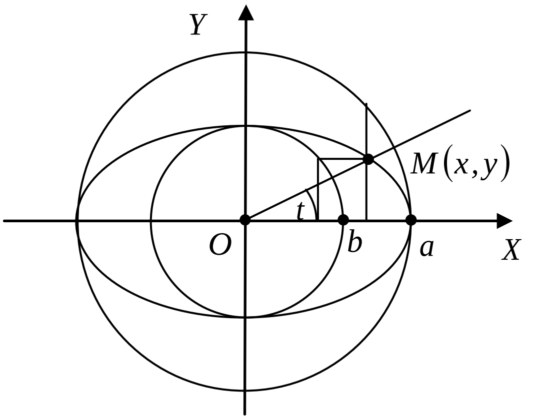


Рис. 15

Эксцентриситет эллипса: $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

A_1, A_2, B_1, B_2 – вершины эллипса, а директрисы имеют уравнения: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ (рис. 14).

Параметрические уравнения эллипса (рис. 15):

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

8.в. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, постоянна и равна $\pm 2a$ (рис. 16).

Фокальная ось гиперболы $F_2F_1 = 2c$; r_1, r_2, – фокальные радиусы гиперболы, соответствующие точке $M(x, y)$.

$r_2 - r_1 = \pm 2a$; $2c > 2a$, $c > a$ (по свойству сторон треугольника)

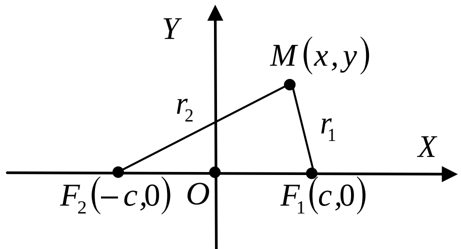


Рис. 16

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Обозначим $c^2 - a^2 = b^2$, тогда уравнение гиперболы примет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (34)$$

Вершины гиперболы: $A_1(a,0)$ $A_2(-a,0)$ – вещественные вершины; $B_1(0,b)$ $B_2(0,-b)$ – мнимые вершины.

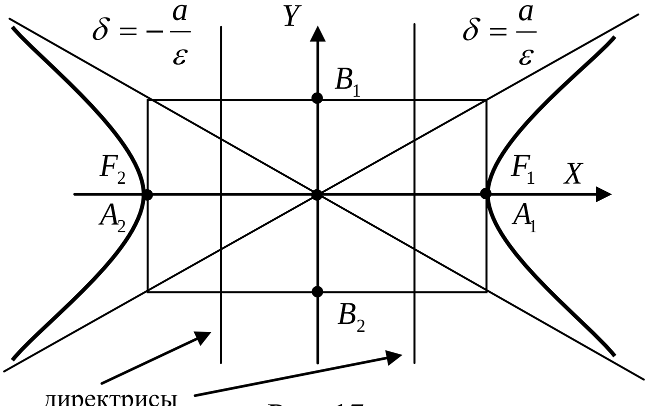


Рис. 17

Прямые $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ являются асимптотами гиперболы (рис. 17).

Гипербола состоит из двух несмыкающихся ветвей, лежащих в углах между прямыми $y = -\dfrac{b}{a} x$, $y = \dfrac{b}{a} x$ и неограниченно приближающихся к этим прямым. A_1 вещественная ось, $B_1 B_2$ – мнимая ось.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$.

Директрисы гиперболы обладают тем свойством, что отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы.

Уравнение директрис $x = \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$ или $x = \pm \dfrac{a^2}{c}$.

8.г. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, одинаково удаленных от заданной прямой (директрисы) и заданной точки (фокуса). Пусть точка $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ – фокус. Прямая BD – директриса параболы; $M(x, y)$ – произвольная точка параболы, $FD = p > 0$ параметр параболы.

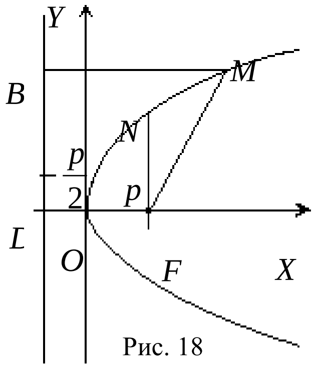


Рис. 18

По определению параболы $MF = MB$. Уравнение параболы с вершиной в точке $O(0,0)$ и директрисой BD (см. рис. 18) , заданной уравнением $x = -\dfrac{p}{2}$, имеет канонический вид:

$$y^2 = 2px. \qquad (35)$$

Замечание: если положить $x = \dfrac{p}{2}$, то $y = \pm p$, то есть $NF = p$ ($NF \perp OX$).

Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

Другие виды параболы:

2) $y^2 = -2px$ (рис. 19) - парабола с осью симметрии OX, фокусом $F\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$ и директрисой $x = \dfrac{p}{2}$.

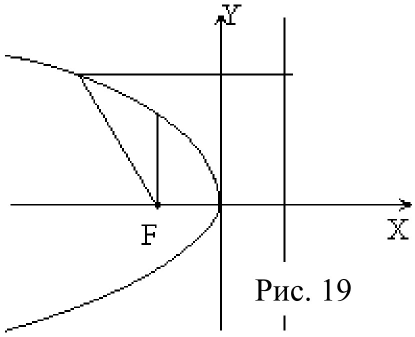


Рис. 19

3) $x^2 = 2py$ - (рис. 20.) парабола с осью

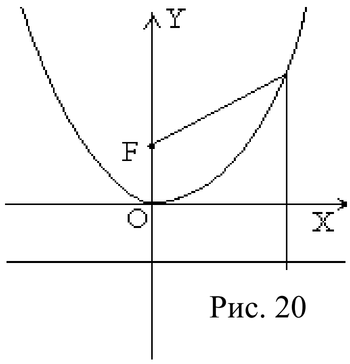
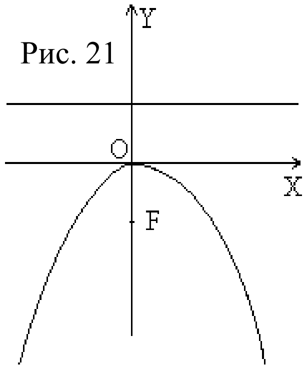


Рис. 20

симметрии OY, фокусом $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ и директрисой $y=-\frac{p}{2}$.

4) $x^2=-2py$ - (рис. 21.) парабола с осью симметрии OY, фокусом $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$ и директрисой $y=\frac{p}{2}$.

Рис. 21



Пример 18. Установить, что уравнение

$$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$$

определяет эллипс. Найти его центр C, полуоси, координаты фокусов F_1, F_2, эксцентриситет и уравнения директрис. Сделать чертеж.

Решение.

1. В заданном уравнении сгруппируем слагаемые, содержащие одноименные координаты и вынесем коэффициенты при квадратах за скобки:

$$5\cdot\left(x^2-6x\right)+9\cdot\left(y^2+2y\right)+9=0.$$

Дополним выражения, стоящие в скобках, до полного квадрата и полученные свободные константы перенесем в правую часть:

$$5\cdot\left(x^2-6x+9-9\right)+9\cdot\left(y^2+2y+1-1\right)+9=0,$$

$$5\cdot\left(\left(x-3\right)^2-9\right)+9\cdot\left(\left(y+1\right)^2-1\right)+9=0,$$

$$5\cdot\left(x-3\right)^2+9\cdot\left(y+1\right)^2=45.$$

Разделим обе части уравнения на **45,** получим

$$\frac{\left(x-3\right)^2}{9}+\frac{\left(y+1\right)^2}{5}=1.$$

2. Введем новую систему координат XOY, полученную сдвигом по каждой из координатных осей, и связанную со старой декартовой системой координат равенствами:

$$\begin{cases} X=x-3 \\ Y=y+1 \end{cases} \qquad (1).$$

Тогда, исследуемое уравнение кривой относительно новых осей примет вид:

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{5}=1, \qquad \frac{X^2}{3^2}+\frac{Y^2}{(\sqrt{5})^2}=1.$$

Это есть канонический вид эллипса с центром $\tilde{C}\left(0,0\right)$, большой полуосью $a=3$, малой полуосью $b=\sqrt{5}$. Фокусы эллипса располагаются на оси OX на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от начала координат O, в точках $\tilde{F}_1\left(c,0\right)$, $\tilde{F}_2\left(-c,0\right)$ в новой системе координат **XOY**.

Вычисляем, $c=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9-5}=2$, $\tilde{F}_1(2{,}0)$, $\tilde{F}_2(-2{,}0)$. Мера сжатия, то есть эксцентриситет, дается равенством $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$. Отсюда $\varepsilon=\dfrac{2}{3}$. Директрисы эллипса в системе **XOY** задаются уравнениями $X=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$. В нашем случае, $X=\pm\dfrac{9}{2}$.

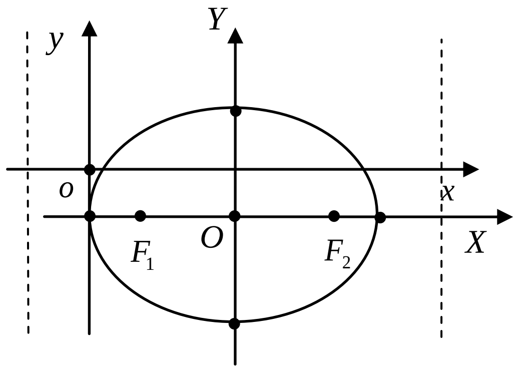
3. Чтобы найти координаты центра и фокусов в старой системе xoy, воспользуемся равенствами (1), осуществляющими связь систем координат:

центр C: $\begin{cases}0=x-3\\0=y+1\end{cases}$, $C(3,-1)$,

фокусы F_1: $\begin{cases}2=x-3\\0=y+1\end{cases}$, $F_1(5,-1)$, F_2: $\begin{cases}-2=x-3\\0=y+1\end{cases}$, $F_2(1,-1)$.

Уравнения директрис: $x-3=\pm\dfrac{9}{2}$.

4. Теперь построим эллипс. С помощью параллельного переноса системы координат xoy образуем новую систему координат XOY так, чтобы новое начало координат O совпадало с точкой $C(3,-1)$. При указанном выборе, оси координат системы XOY являются осями симметрии эллипса, а точка O - центром симметрии. Теперь симметрично O по оси OX отложим отрезки длины $a=3$, а по оси OY отрезки длины $b=\sqrt{5}$.

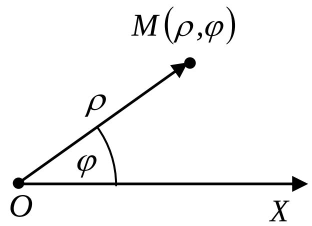


Соединив найденные вершины, получим эллипс. На оси OX симметрично относительно O на расстоянии $c=2$ отложим точки F_1, F_2 - фокусы эллипса. Так как директрисы эллипса описываются уравнениями $x=const$, то они располагаются параллельно OY, причем одна из них проходит через точку $(7{,}5;0)$, другая через $(-1{,}5;0)$.

Полярная система координат.

При решении многих задач аналитической геометрии оказывается более удобным определять положение точки на плоскости не прямоугольными декартовыми координатами, а так называемыми полярными координатами.

Система полярных координат задается полюсом - точкой O и полупрямой, исходящей из полюса («луч» - ρ - полярная ось).

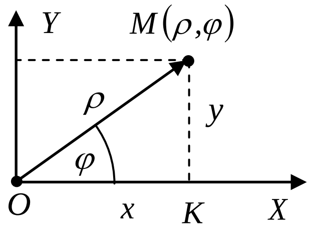


$OM=\rho$, $\angle MOX=\varphi$. Числа ρ и φ определяют положение точки M относительно системы координат, их называют полярными координатами точки $M(\rho,\varphi)$.

Чтобы установить взаимнооднозначное соответствие между точками плоскости и координатами этой точки, ограничим изменение полярного угла $\boldsymbol{\varphi}$ промежутком $-\boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{\varphi} \le \boldsymbol{\pi}$ (или иным промежутком длины $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$). Значения $\boldsymbol{\varphi}$, удовлетворяющие этому условию, называют *главными значениями*. Назовем полярные координаты $\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}$ *основными*, если $\boldsymbol{\rho} \ge \mathbf{0}$, а $\boldsymbol{\varphi}$ есть главное значение полярного угла, т.е. если $-\boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{\varphi} \le \boldsymbol{\pi}$.

Связь между прямоугольными и полярными координатами.

Пусть полюс системы координат совпадает с началом декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью ОХ. Тогда из $\boldsymbol{\Delta OMK}$:



$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \rho\, cos\varphi} \\ \boldsymbol{y = \rho\, sin\varphi} \end{cases}$$

- это формулы перехода к декартовой системе координат.

Выведем формулы обратного перехода от декартовых координат к полярным.

Полярный радиус – вектор $\boldsymbol{\rho}$, будучи расстоянием от точки $\boldsymbol{M}$ до начала координат, будет равен:

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}\ , \text{ а также, } \boldsymbol{cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\ , \quad \boldsymbol{sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}\ .$$

Угол $\boldsymbol{\varphi}$ определяется из условия: $\boldsymbol{tg\varphi = \frac{x}{y}}$t и знаков функций

$$\boldsymbol{cos\varphi = \frac{x}{\rho};} \quad \boldsymbol{sin\varphi = \frac{y}{\rho}}.$$

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

№ п/п	Тема и содержание практического занятия	УММ для подготовки к практическим занятиям	Литература	Контрольные и тестовые материалы
1	Определители 2-го, 3-го и более высоких порядков, их вычисление. Решение СЛАУ по формулам Крамера.	1.Методическме указания «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» 2.Примеры выполнения практических заданий. Раздел 1	1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Практикум по высшей математике для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2003. [Гл.1 §1.2, Гл. 2 §2.1] 2.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.М.: Высш.шк.,2004 [Гл. I, §5, Гл. IV, §1]	1. Тесты для текущего контроля знаний 2.Задания для практических занятий и текущего контроля.
2	Матрицы, операции над матрицами. Обратная матрица, ее вычисление. Решение простейших матричных уравнений. Решение СЛАУ матричным методом.	1.Методическме указания «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» 2.Примеры выполнения практических заданий. Раздел 1	1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Практикум по высшей математике для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2003. [Гл.1 §§1.1, 1.2, Гл. 2 §2.1] 2.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.М.: Высш.шк.,2004 [Гл. IV, §2]	1. Тесты для текущего контроля знаний 2.Задания для практических занятий и текущего контроля.
3	Нахождение ранга матриц, исследование СЛАУ на совместность. Решение СЛАУ методом Жордана-Гауса. Решение однородных СЛАУ. Задачи с экономическим содержанием.	1.Методическме указания «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» 2.Примеры выполнения практических заданий. Раздел 1	1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Практикум по высшей математике для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2003. [Гл.1 §§1.3, 1.4, Гл. 2 §§2.2-2.5] 2.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.М.: Высш.шк.,2004 [Гл. IV, §§4-7]	1. Тесты для текущего контроля знаний 2.Задания для практических занятий и текущего контроля.
4	Линейные операции над векторами в геометрической и координатной формах. Разложение векторов по базису. Проверка системы векторов на линейную независимость в прост-ранствах различной размерности.	1.Методическме указания «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» 2.Примеры выполнения практических заданий. Раздел 1	1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Практикум по высшей математике для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2003. [Гл.3] 2.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.М.: Высш.шк.,2004 [Гл. II, §§1,2]	1. Тесты для текущего контроля знаний 2.Задания для практических занятий и текущего контроля.
5	Скалярное произведение векторов. Длина вектора, его направляющие косинусы, угол между векторами. Приложения	1.Методическме указания «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия»	1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Практикум по высшей математике для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2003. [Гл.3]	1. Тесты для текущего контроля знаний 2.Задания для практических занятий и

	скалярного произведе-ния, вектора. Векторное и смешан-ное произведения векторов, их приложения.	2.Примеры выполнения практических заданий. Раздел 1	2.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.М.: Высш.шк.,2004 [Гл. II, §3]	текущего контроля.
6	Плоскость, общее уравнение плоскости. Решение задач на составление уравнений плоскости. Прямая в пространстве. Решение задач на тему «Прямая и плоскость». Прямая на плоскости.	1.Методическме указания «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» 2.Примеры выполнения практических заданий. Раздел 1	1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Практикум по высшей математике для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2003. [Гл.4 §§4.1, 4.3] 2.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.М.: Высш.шк.,2004 [Гл. II, §1]	1. Тесты для текущего контроля знаний 2.Задания для практических занятий и текущего контроля
7	Общее уравнение кривой 2-го порядка. Классификация кривых 2-го порядка. Эллипс, парабола, ги-пербола: канонические уравнения, приведение к каноническому виду, характеристики. Параметричес-кие уравнения.	1.Методические указания «Линейная алгебра и кривые второго порядка» 2.Примеры выполнения практических заданий. Раздел 1	1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Практикум по высшей математике для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2003. [Гл.4 §4.2] 2.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.М.: Высш.шк.,2004 [Гл. I, §3, Гл. IV, §3]	1. Тесты для текущего контроля знаний 2.Задания для практических занятий и текущего контроля.
8	Контрольная работа (КР) по темам СЛАУ, ВА, и АГ.	1.Методические указания «Линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия» 2.Методические указания «Линейная алгебра и кривые второго порядка» 3.Примеры выполнения практических заданий. Раздел 1	1. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М. Практикум по высшей математике для экономистов. М.: ЮНИТИ, 2003. [Гл.1-4] 2.Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1.М.: Высш.шк.,2004 [Гл. I, II, IV,]	1. Задания для контрольных работ, рубежного и итогового контроля 2. Тестовые задания для контрольных работ, рубежного и итогового контроля

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ДГТУ)

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) ДГТУ в г. Азове

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

«ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ »

Азов
2020

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ
ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Общие положения:

Целями изучения дисциплины «Исследование операций» являются формирование фундаментальных теоретических знаний в области математических методов оптимизации управленческих решений и навыков принятия управленческих решений на основе построения математических моделей.

Изучение дисциплины «Исследование операций» осуществляется в рамках аудиторной (лекции и практические занятия) и самостоятельной работы. В процессе лекций студентам рекомендуется вести конспектирование, что позволит впоследствии вспомнить изученный учебный материал. Для лучшего усвоения лекционного материала разработаны презентационные материалы, где тезисно отображены основные положения лекции. Подготовка к лекциям требует самостоятельной подготовки в виде конспектирования материала, необходимого для лекции.

Практические занятия являются основой для эффективного усвоения теоретического материала и приобретения практических навыков. Для подготовки к практическим занятиям необходимо выполнять все задания преподавателя, пользуясь материалами лекции и рекомендованной литературой.

Во внеаудиторное время студенты выполняют разнообразные виды самостоятельных работ: аннотирование специализированной литературы, решение задач, математическое моделирование, анализ конкретных ситуаций.

Самый оптимальный вариант планирования и организации студентом времени, необходимого для изучения дисциплины – распределить учебную нагрузку равномерно, знакомясь каждую неделю с теоретическим материалом на лекциях и закрепляя его на практических занятиях и самостоятельно.

Тематический план дисциплины (содержание лекционного материла):

1. Введение в исследование операций

Исследование операций как научная дисциплина. История развития дисциплины. Основные понятия исследования операций: операция, математическая модель операции, оптимальное решение, эффективность операции.

2. Основы линейного программирования

2.1. Графическое решение задачи линейного программирования

Задача составления рациона. Задача использования ресурсов. Стандартная и каноническая формы записи модели линейного программирования

2.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Основные идеи симплекс процесса. Симплекс таблица. Анализ решения ЗЛП на основе отчетов Ms EXCEL

2.3. Двойственные задачи линейного программирования Теоремы двойственности.

Двойственный симплекс метод.

2.4. Транспортная задача

Экономико-математическая модель транспортной задачи. Транспортная таблица. Задача коммивояжера. Задача о назначениях.

3.. Теория игр

3.1. Элементы теории игр

Основные понятия теории игр. Классификация игр. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

4. Модели динамического программирования и сетевого планирования

4.1. Модели динамического программирования

Общая постановка задачи динамического программирования. Принцип оптимальности Беллмана. Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на n лет.

4.2. Системы массового обслуживания

Структура и классификация системы массового обслуживания. Системы массового обслуживания с отказами. Системы массового обслуживания: с неограниченным ожиданием. Системы массового обслуживания с ожиданием и ограниченной длинной очереди. Замкнутые системы массового обслуживания.

4.3 Модели сетевого планирования и управления

Назначение сетевой модели планирования и управления. Основные элементы сетевой модели. Расчет параметров сетевого графика.

Подготовка к практическим занятиям

К практическим занятиям необходимо готовиться за неделю до срока их проведения, чтобы была возможность проконсультироваться с преподавателем по трудным вопросам. В случае пропуска занятия, необходимо предоставить письменную разработку пропущенной темы. Самостоятельную работу следует выполнять согласно графику и требованиям, предложенным преподавателем.

Допуск к зачету по дисциплине предполагает активное участие на практических занятиях.

Основным промежуточным показателем успешности студента является его готовность к практическим занятиям. Алгоритм действий студента по подготовке к практическим занятиям:

- приступая к выполнению задания по любой теме, необходимо ознакомиться с лекционным материалом по данной теме, изучить соответствующие раздел учебника или учебного пособия;
- по каждому вопросу предложенной темы студент должен определить и усвоить ключевые понятия и представления;
- задания должны быть выполнены в отдельной тетради с указанием темы, номера задания;
- в случае возникновения трудностей студент должен и может обратиться за консультацией к преподавателю, ведущем данный курс;
- критерием готовности к практическому занятию будет выполнение всех заданий преподавателя по текущей теме т умение ответить на все указанные вопросы, используя рекомендованные источники, а также наличие соответствующих конспектов.

Самостоятельная работа студента

К СРС относятся:

1. Самостоятельное изучение тем теоретического курса;
2. Подготовка к практическим занятиям;
3. Подготовка к текущему, промежуточному и итоговому контролю

В общем виде самостоятельная работа включает:

1. Систематическая проработка конспектов занятий, учебной и специальной литературы
2. Подготовка к практическим работам с использованием методических рекомендаций

преподавателя

Рекомендации по работе с литературой

Работа с литературой организуется преподавателем (рекомендуются источники обязательные для прочтения и конспектирования). Студенты прорабатывают текст во внеаудиторное время. Контроль выполнения осуществляется на занятии или во внеаудиторное время.

Рекомендации по подготовке к зачету

Подготовка к зачету требует оптимально организовать свое время. Наиболее эффективным считается вариант, когда студент познакомился с основными представлениями и понятиями в аудиторном процессе изучения дисциплины. В этом случае подготовка к зачету по контрольным вопросам позволит систематизировать материал и глубже его усвоить.

Краткий теоретический материал

Введение

Исследование операций - это прикладное направление кибернетики, изучающее способы совершенствования и повышения эффективности организации, планирования и управления в различных системах на основе количественных методов.

Наибольшее распространение находят многовариантные и оптимизационные расчеты. В настоящее время постепенно переходят от многовариантных расчетов к оптимизационным, которые имеют большие преимущества перед многовариантными.

Задача оптимизации в общем случае включает три составляющие: целевую функцию (критерий оптимизации), ограничения, граничные условия.

Критерий оптимизации показывает влияние искомых переменных на его величину, которая должна быть минимизирована или максимизирована в зависимости от выбранного критерия.

Ограничения определяют существующие связи между искомыми переменными. По своему происхождению связи могут быть детерминированными и статистическими.

Граничные условия показывают предельно допустимые значения искомых переменных.

Значения искомых переменных, удовлетворяющих граничным условиям и ограничениям, называют допустимым решением задачи.

В многовариантных расчетах задаются конкретные значения некоторых искомых величин. В оптимизационных же задаются не значения, а граничные условия, то есть предельно допустимые значения всех искомых величин. В многовариантных расчетах значение целевой функции является следствием заданных значений величин. В оптимизационных же находятся такие значения искомых величин, которые, во-первых, удовлетворяют всем ограничениям и граничным условиям, а во-вторых, придают целевой функции оптимальное, то есть максимальное или минимальное значение.

Раздел 1. Основы моделирования

§1. Основные понятия: решение, множество возможных решений, оптимальное решение, показатель эффективности

Операцией называется всякое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Всякий определенный выбор зависящих от нас параметров называется решением. Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными.

Оптимальными называются решения, по тем или другим признакам предпочтительные перед другими.

Процесс поиска (выбора) решения носит циклический характер, т.е. любой из входящих в него этапов может повторяться неоднократно до тех пор, пока не будет найдено решение, удовлетворяющее требованиям Лица Принимающего Решения. При этом могут уточняться цели и условия проведения операции.

Иногда в результате исследования удается указать одно-единственное строго оптимальное решение, чаще — выделить область практически равноценных оптимальных (разумных) решений, в пределах которой может быть сделан окончательный выбор.

Параметры, совокупность которых образует решение, называются элементами решения. В качестве элементов решения могут фигурировать различные числа, векторы, функции, физические признаки и т. д. Например, если составляется план перевозок однородных грузов из пунктов отправления A1, A2, ... Am в пункты назначения B1, B2, ..., Bn, то элементами решения будут числа xij, показывающие, какое количество груза будет отправлено из i-го пункта отправления Ai в j-й пункт назначения Bj. Совокупность чисел xij образует решение.

Совокупность элементов решения будем обозначать одной буквой x и говорить «решение x».

Кроме элементов решения в любой задаче исследования операций имеются еще заданные условия, которые фиксированы с самого начала и нарушены быть не могут (например, грузоподъемность машины; размер планового задания; весовые характеристики оборудования и т. п.). В своей совокупности они формируют так называемое «множество возможных решений».

Обозначим это множество буквой X. Запишем в виде формулы, что решение x принадлежит этому множеству: $x \in X$ (читается: элемент x входит в множество X).

Во множестве возможных решений X необходимо выделить те решения x (одно или область решений), которые с той или другой точки зрения эффективнее других. Для сравнения между собой по эффективности разные решения существует количественный критерий - показатель эффективности W («целевая функция»). Этот показатель выбирается так, чтобы он отражал целевую направленность операции. «Лучшим» будет считаться то решение, которое в максимальной степени способствует достижению поставленной цели.

Если показатель эффективности желательно максимизировать, то будем записывать в виде W => max, а если минимизировать — W => min.

§2. Математические модели, основные принципы построения моделей

Для применения количественных методов исследования в любой области всегда требуется какая-то математическая модель.

Математическая модель представляет собой формализованное описание операции с помощью некоторого абстрактного языка, например в виде совокупности математических соотношений, или схемы алгоритма. Любое математическое выражение, в котором фигурируют физические величины, можно рассматривать как математическую модель того или иного процесса или явления.

При построении модели реальное явление упрощается, схематизируется, и эта схема («макет» явления) описывается с помощью того или другого математического аппарата.

В каждом конкретном случае модель выбирается исходя из вида операции, ее целевой направленности, с учетом задачи исследования, какие параметры требуется определить и влияние каких факторов отразить. Необходимо также в каждом конкретном случае соразмерять точность и подробность модели:

а) с той точностью, с которой нам нужно знать решение;

б) с той информацией, которой мы располагаем или можем приобрести.

Математическая модель должна отражать важнейшие черты явления, все существенные факторы, от которых зависит успех операции.

Характерным для исследования операций является также повторное обращение к модели (после того, как первый тур расчетов уже проведен) для внесения в модель коррективов.

При построении математической модели может быть использован математический аппарат различной сложности. В самых простых случаях явление описывается простыми, алгебраическими уравнениями. В более сложных, когда требуется рассмотреть явление в динамике, применяются дифференциальные уравнения. В наиболее сложных случаях, когда развитие операции и ее исход зависят от большого числа сложно переплетающихся между собой случайных факторов, применяется метод статистического моделирования (Монте-Карло). Идею этого метода можно описать так: процесс развития операции, со всеми сопровождающими его случайностями, как бы «копируется», воспроизводится на машине (ЭВМ). В результате получается один экземпляр («реализация») случайного процесса развития операции со случайным ходом и исходом. Сама по себе одна такая реализация не дает оснований к выбору решения, но, получив множество таких реализаций и обработав их, находим средние характеристики процесса и получаем представление о том, как в среднем влияют на них условия задачи и элементы решения.

В исследовании операций применяются как аналитические, так и статистические модели. Аналитические модели более грубы, учитывают меньшее число факторов, всегда требуют каких-то допущений и упрощений. Зато результаты расчета по ним легче обозримы, отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности. Аналитические модели больше приспособлены для поиска оптимальных решений.

Статистические модели, по сравнению с аналитическими, более точны и подробны, не требуют столь грубых допущений, позволяют учесть большое число факторов. Но и у них — свои недостатки: громоздкость, плохая обозримость, большой расход машинного времени, а главное, крайняя трудность поиска оптимальных решений, которые приходится искать путем догадок и проб.

Наилучшие работы в области исследования операций основаны на совместном применении аналитических и статистических моделей. Аналитическая модель дает возможность в общих чертах разобраться, в явлении, наметить как бы «контур» основных закономерностей. Любые уточнения могут быть получены с помощью статистических моделей.

Имитационное моделирование применяется к процессам, в ход которых может время от времени вмешиваться человеческая воля. Человек (или группа людей), руководящий операцией, может, в зависимости от сложившейся обстановки, принимать те или другие решения. Затем приводится в действие математическая модель, которая показывает, какое ожидается изменение обстановки в ответ на это решение и к каким последствиям оно приведет спустя некоторое время. Следующее «текущее решение» принимается уже с учетом реальной новой обстановки и т. д. В результате многократного повторения такой процедуры руководитель постепенно «учится» принимать правильные решения — если не оптимальные, то почти оптимальные. Такие процедуры известны под названием «деловых игр».

§3. Прямые и обратные задачи. Детерминированные задачи и задачи в условиях неопределенности

Задачи исследования операций делятся на две категории: прямые и обратные. Прямые задачи отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях мы примем какое-то решение $x \in X$? В частности, чему будет равен, при данном решении x, выбранный показатель эффективности W?

Для решения такой задачи строится математическая модель, позволяющая выразить один или несколько показателей эффективности через заданные условия и элементы решения.

Обратные задачи отвечают на вопрос: как выбрать решение x для того, чтобы показатель эффективности W обратился в максимум?

Если число возможных вариантов решения, образующих множество X, мало, то можно вычислить величину W для каждого из них, сравнить между собой полученные значения и непосредственно указать один или несколько оптимальных вариантов, для которых W достигает максимума. Такой способ нахождения оптимального решения называется «простым перебором».

Запишем постановку задачи оптимизации решения (обратной задачи исследования операций) в общей форме:

Пусть имеется некоторая операция O, на успех которой мы можем в какой-то мере влиять, выбирая тем или другим способом решение x. Пусть эффективность операции характеризуется одним показателем W=> max.

Возьмем самый простой, так называемый «детерминированный» случай, когда все условия операции полностью известны заранее, т. е. не содержат неопределенности. Тогда все факторы, от которых зависит успех операции, делятся на две группы:

1) заданные, заранее известные факторы (условия выполнения операции), которые обозначим буквой α;

2) зависящие от нас элементы решения, образующие в своей совокупности решение x.

Первая группа факторов содержит ограничения, налагаемые на решение, т. е. определяет область возможных решений X.

Показатель эффективности W зависит от обеих групп факторов. Запишем это в виде формулы:

$$W=W(\alpha,x) \qquad (3.1)$$

В числе заданных условий α обычно присутствуют ограничения, налагаемые на элементы решения, имеющие вид равенств или неравенств.

Будем считать, что вид зависимости (3.1) нам известен, т. е. прямая задача решена. Тогда обратная задача формулируется следующим образом.

При заданном комплексе условий α найти такое решение $x=x^*$, которое обращает показатель эффективности W в максимум.

Этот максимум обозначим:

$$W^* = \max \{W(\alpha, x)\}. \qquad (3.2)$$

Формула (3.2) читается так: W^* есть максимальное значение $W(\propto,x)$, взятое по всем решениям, входящим в множество возможных решений X.

Метод поиска экстремума и связанного с ним оптимального решения x^* должен всегда выбираться исходя из особенностей функции W и вида ограничений, накладываемых на решение. Например, если функция W линейно зависит от элементов решения x1, x2, ..., а ограничения, налагаемые на x1, x2, ..., имеют вид линейных равенств или неравенств, возникает классическая задача линейного программирования.

Для оптимизации управления многоэтапными операциями применяется метод динамического программирования.

Рассмотрим обратную задачу исследования операций когда показатель эффективности W зависит не только от двух групп факторов: заданных, заранее известных $\propto$ и элементов решения x, но и от еще одной — неизвестных факторов, которые в совокупности обозначим буквой ξ.

Запишем зависимость показателя эффективности W от всех трех групп факторов:

$$W=W(\alpha, x, \xi). \qquad (3.3)$$

Так как величина W зависит от неизвестных факторов ξ, то даже при заданных α и x она уже не может быть вычислена, т.е. остается неопределенной. Задача поиска оптимального решения тоже теряет определенность. Следовательно, при заданных условиях α, с учетом неизвестных факторов ξ, требуется найти такое решение $x \in X$, которое, по возможности, обеспечивает максимальное значение показателя эффективности W.

Наличие неопределенных факторов ξ характерно для задачи о выборе решения в условиях неопределенности.

Типичной для крупномасштабной задачи исследования операций является многокритериальность — наличие ряда количественных показателей W1, W2,.., одни из которых желательно обратить в максимум, другие — в минимум.

Рассмотрим пример такой задачи.

Организуется (или реорганизуется) работа промышленного предприятия. Под углом зрения какого критерия надо выбирать решение? С одной стороны, нам хотелось бы обратить в максимум валовой объем продукции V. Желательно также было бы получить максимальный чистый доход D. Что касается себестоимости S, то ее хотелось бы обратить в минимум, а производительность труда П — в максимум.

Раздел 2. Линейное программирование

§1. Задачи линейного программирования

В задачах, где выбор показателя эффективности (целевой функции) W определяется целевой направленностью операции, а ее условия известны заранее (детерминированный случай), показатель эффективности зависит только от двух групп параметров: заданных условий α и элементов решения x, т. е.

$W=W(\alpha, x)$.

В число заданных условий α входят и ограничения, налагаемые на элементы решения. Пусть решение x представляет собой совокупность n элементов решения $x1, x2, ..., xn$ (иначе — n-мерный вектор):

$x= (x1, x2, ..., xn)$.

Требуется найти такие значения $x1, x2, ..., xn$, которые обращают величину W в максимум или в минимум (т.е. «экстремум»).

Задачи нахождения значений параметров, обеспечивающих экстремум функции при наличии ограничений, наложенных на аргументы, называются задачами математического программирования.

Для задач линейного программирования характерно что:

а) показатель эффективности (целевая функция) W линейно зависит от элементов решения $x1, x2, ..., xn$ и

б) ограничения, налагаемые на элементы решения, имеют вид линейных равенств или неравенств относительно $x1, x2, ..., xn$.

Такие задачи встречаются на практике, например, при решении проблем, связанных с распределением ресурсов, планированием производства, организацией работы транспорта и т. д.

Приведем несколько примеров задач линейного программирования.

1. Задача о пищевом рационе. Ферма производит откорм скота с коммерческой целью. Для простоты допустим, что имеется всего четыре вида продуктов: П1, П2, П3, П4; стоимость единицы каждого продукта равна соответственно c1, c2, c3, c4. Из этих продуктов требуется составить пищевой рацион, который должен содержать: белков — не менее b1 единиц; углеводов — не менее b2 единиц; жиров — не менее b3 единиц. Для продуктов П1, П2, П3, П4 содержание белков, углеводов и жиров (в единицах на единицу продукта) известно и задано в таблице 4.1, где aij (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3) — какие-то определенные числа; первый индекс указывает номер продукта, второй — номер элемента (белки, углеводы, жиры).

Требуется составить такой пищевой рацион (т. е. назначить количества продуктов П1, П2, П3, П4, входящих в него), чтобы условия по белкам, углеводам и жирам были выполнены и при этом стоимость рациона была минимальна.

Таблица 4.1

Продукт	Элементы		
	белки	углеводы	жиры
П1	a11	a12	a13
П2	a21	a22	a23
П3	a31	a32	a33
П4	a41	a42	a43

Составим математическую модель. Обозначим x1, x2, x3, x4 количества продуктов П1, П2, П3, П4, входящих в рацион. Показатель эффективности, который требуется минимизировать,— стоимость рациона (обозначим ее L); она линейно зависит от элементов решения x1, x2, x3, x4:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \tag{4.1}$$

или

$$L = \sum_{i=1}^{4} c_i x_i \tag{4.2}$$

Вид целевой функции известен и она линейна. Запишем теперь в виде формул ограничительные условия по белкам, углеводам и жирам.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + a_{41}x_4 &\geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + a_{42}x_4 &\geq b_2 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{43}x_4 &\geq b_3 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Эти линейные неравенства представляют собой ограничения, накладывае-мые на элементы решения x_1, x_2, x_3, x_4.

Таким образом, поставленная задача сводится к следующей: найти такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы они удовлетворяли ограничениям — неравенствам (3.3) и одновременно обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

$$L = \sum_{i=1}^{4} c_i x_i \longrightarrow \min \tag{4.4}$$

2. Задача о планировании производства. Предприятие производит изделия трех видов: U1, U2, U3. По каждому виду изделия предприятию спущен план, по которому оно обязано выпустить не менее b_1 единиц изделия U1, не менее b_2 единиц изделия U2 и не менее b_3 единиц изделия U3. План может быть перевыполнен, но в определенных границах; условия спроса ограничивают количества произведенных единиц каждого типа: не более соответственно $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, единиц. На изготовление изделий идет какое-то сырье; всего имеется четыре вида сырья: S1, S2, S3, S4, причем запасы ограничены числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ единиц каждого вида сырья. Укажем, какое количество сырья каждого вида идет на изготовление каждого вида изделий. Обозначим a_{ij} количество единиц сырья вида S_i ($i=1, 2, 3, 4$), потребное на изготовление одной единицы изделия U_j ($j = 1, 2, 3$). Первый индекс у числа a_{ij} — вид сырья, второй — вид изделия. Значения a_{ij} сведены в таблицу 4.2.

Таблица 4.2

Изделия	Сырьё		
	U1	U2	U3
S1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
S2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
S3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
S4	a_{41}	a_{42}	a_{43}

При реализации одно изделие U1 приносит предприятию прибыль c_1, U2— прибыль c_2, U3 — прибыль c_3. Требуется так спланировать производство (сколько каких изделий производить), чтобы план был выполнен или перевыполнен (но при отсутствии «затоваривания»), а суммарная прибыль обращалась в максимум.

Запишем задачу в форме задачи линейного программирования. Элементами решения будут x_1, x_2, x_3, — количества единиц изделий U1, U2, U3, которые мы произведем. Обязательность выполнения планового задания запишется в виде трех ограничений-неравенств:

$$x_1 \geq b_1,\ x_2 \geq b_2,\ x_3 \geq b_3 \tag{4.5}$$

Отсутствие излишней продукции (затоваривания) даст нам еще три ограничения-неравенства:

$$x1 \le \beta 1 \, , \; x2 \le \beta 2 \, , \; x3 \le \beta 3 \qquad (4.6)$$

Кроме того, нам должно хватить сырья. Соответственно четырем видам сырья будем иметь четыре ограничения-неравенства:

$$\begin{aligned} a11x1 + a21x2 + a31x3 &\le \lambda 1 \\ a12x1 + a22x2 + a32x3 &\le \lambda 2 \\ a13x1 + a23x2 + a33x3 &\le \lambda 3 \\ a14x1 + a24x2 + a34x3 &\le \lambda 4 \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Прибыль, приносимая планом (x1, x2, x3), будет равна

$$L = c1x1 + c2x2 + c3x3 \longrightarrow \max \qquad (4.8)$$

3. Задача о загрузке оборудования. Ткацкая фабрика располагает двумя видами станков, из них n1 станков типа 1 и N2 станков типа 2. Станки могут производить три вида тканей: T1, T2, T3, но с разной производительностью. Данные aij производительности станков даны в таблице 4.3 (первый индекс — тип станка, второй — вид ткани).

Таблица 4.3

Станки	Виды тканей		
	T1	T2	T3
N1	a11	a12	a13
N2	a21	a22	a23

Каждый метр ткани вида T1 приносит фабрике доход c1, вида T2 — доход c2, T3 — доход C3.
Фабрике предписан план, согласно которому она должна производить в месяц не менее b1 метров ткани T1, b2 метров ткани T2, b3 метров ткани T3; количество метров каждого вида ткани не должно превышать соответственно β1, β2, β3 метров. Кроме того, все без исключения станки должны быть загружены. Требуется так распределить загрузку станков производством тканей T1, T2, T3, чтобы суммарный месячный доход был максимален.
В этой задаче элементы решения — не количества тканей каждого вида, а количества станков типов 1 и 2, занятых производством тканей каждого вида. Здесь удобно обозначить элементы решения буквами x с двумя индексами (первый — тип станка, второй — вид ткани). Всего будет шесть элементов решения:

$$\begin{matrix} x11 & x12 & x13 \\ x21 & x22 & x23 \end{matrix} \qquad (4.9)$$

Здесь x11 — количество станков типа 1, занятых изготовлением ткани T1, x12 — количество станков типа 1, занятых изготовлением ткани T2, и т. д.
Запишем условия-ограничения, наложенные на элементы решения xij. Прежде всего, обеспечим выполнение плана. Это даст нам три неравенства-ограничения:

$$\begin{aligned} a11x11 + a21x21 &\ge b1 \\ a12x12 + a22x22 &\ge b2 \\ a13x13 + a23x23 &\ge b3 \end{aligned} \qquad (4.10)$$

После этого ограничим перевыполнение плана; это даст нам еще три неравенства-ограничения:

$a11x11 + a21x21 \le \beta1$
$a12x12 + a22x22 \le \beta2$ (4.11)
$a13x13 + a23x23 \le \beta3$

Запишем ограничения, связанные с наличием оборудования и его полной загрузкой. Суммарное количество станков типа 1, занятых изготовлением всех тканей, должно быть равно N1; типа 2 — N2. Отсюда еще два условия — на этот раз равенства:

$x11 + x12 + x13 = N1$ (4.12)
$x21 + x22 + x23 = N2$

Запишем суммарный доход от производства всех видов тканей. Суммарное количество метров ткани Т1, произведенное всеми станками, будет равно a11x11+a21x21 и принесет доход c1(a11x11+a21x21). Рассуждая аналогично, найдем суммарный доход фабрики за месяц при плане (4.9):

$L = c1(a11x11+a21x21) + c2(a12x12+a22x22) + c3(a13x13+a23x23)$ или
3 2
$L = \Sigma$ cj Σ aijxij (4.14)
j=1 i=1

Эта линейная функция шести аргументов стремится к максимуму:

$L \longrightarrow \max$

В этой задаче линейного программирования требуется найти такие неотрицательные значения переменных x11, x12, ..., x23, которые, во-первых, удовлетворяли бы ограничениям-неравенствам (4.10), (4.11), во-вторых — ограничениям-равенствам (4.12) и, наконец, обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных (4.13). В этой задаче линейного программирования шесть ограничений-неравенств и два ограничения-равенства.

4. Задача о снабжении сырьем. Имеются три промышленных предприятия: П1, П2, П3, требующих снабжения определенным видом сырья. Потребности в сырье каждого предприятия равны соответственно a1, a2, a3 единиц. Имеются пять сырьевых баз, расположенных от предприятий на каких-то расстояниях и связанных с ними путями сообщения с разными тарифами. Единица сырья, получаемая предприятием Пi с базы Бi обходится предприятию в cij рублей (первый индекс — номер предприятия, второй — номер базы, см. таблицу 4.4).

Таблица 4.4

Предприятие	База				
	Б1	Б2	Б3	Б4	Б5
П1	a11	a12	a13	a14	a15
П2	a21	a22	a23	a24	a25
П3	a31	a32	a33	a34	a35

Возможности снабжения сырьем с каждой базы ограничены ее производственной мощностью: базы Б1, Б2, Б3, Б4, Б5 могут дать не более b1, b2, b3, b4, b5 единиц сырья. Требуется составить такой план снабжения предприятий сырьем (с какой базы, куда и какое количество сырья везти), чтобы потребности предприятий были обеспечены при минимальных расходах на сырье.

Обозначим xij количество сырья, получаемое i-м предприятием с j-й базы. Всего план будет состоять из 15 элементов решения:

x11 x12 x13 x14 x15
x21 x22 x23 x24 x25 (4.15)
x31 x32 x33 x34 x35

Введем ограничения по потребностям. Они состоят в том, что каждое предприятие получит нужное ему количество сырья (ровно столько, сколько ему требуется):

$$\begin{aligned} &x11 + x12 + x13 + x14 + x15 = a1 \\ &x21 + x22 + x23 + x24 + x25 = a2 \\ &x31 + x32 + x33 + x34 + x35 = a3 \end{aligned} \qquad (4.16)$$

Далее напишем ограничения-неравенства, вытекающие из производственных мощностей баз:

$$\begin{aligned} &x11 + x21 + x31 \le b1 \\ &x12 + x22 + x32 \le b2 \\ &x13 + x23 + x33 \le b3 \\ &x14 + x24 + x34 \le b4 \\ &x15 + x25 + x35 \le b5 \end{aligned} \qquad (4.17)$$

Запишем суммарные расходы на сырье, которые требуется минимизировать. С учетом данных таблицы 4.4 получим (пользуясь знаком двойной суммы):

$$L = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} cijxij \longrightarrow \min \qquad (4.18)$$

§2. Основная задача линейного программирования (ОЗЛП)

Любую задачу линейного программирования можно свести к стандартной форме, так называемой «основной задаче линейного программирования» (ОЗЛП), которая формулируется так: найти неотрицательные значения переменных x1, x2, ..., xn, которые удовлетворяли бы условиям-равенствам

$$\begin{aligned} &a11x1 + a21x2 + \dots + an1xn = b1 \\ &a21x1 + a22x2 + \dots + a2nx2 = b2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &am1x1 + am2x2 + \dots + amnxn = bm \end{aligned} \qquad (5.1)$$

и обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных:

$$L = c1x1 + c2x2 + \dots + cnxn \longrightarrow \max \qquad (5.2)$$

Пусть требуется найти неотрицательные значения переменных x1, x2, x3, удовлетворяющие ограничениям-неравенствам

$$\begin{aligned} &3x1 + 2x2 - x3 \ge 4 \\ &x1 - 2x2 + 3x3 \le 10 \end{aligned} \qquad (5.3)$$

и обращающие в максимум линейную функцию от этих переменных:

$$L = 4x1 - x2 + 2x3 \longrightarrow \max \qquad (5.4)$$

Приведем условия (5.3) к стандартной форме, так, чтобы знак неравенства был ≥, а справа стоял нуль. Получим:

$$\left.\begin{aligned} &3x1 + 2x2 - x3 - 4 \ge 0 \\ &- x1 + 2x2 - 3x3 + 10 \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

Обозначим левые части неравенств (5.5) соответственно через y1 и y2:

$y1 = 3x1 + 2x2 – x3 – 4$
$y2 = - x1 + 2x2 - 3x3 + 10$ (5.6)

Из условий (5.5) и (5.6) видно, что новые переменные y1 и y2 также должны быть неотрицательными.

Требуется найти неотрицательные значения переменных x1, x2, x3, y1, y2 такие, чтобы они удовлетворяли условиям-равенствам (5.6) и обращали в максимум линейную функцию этих переменных. Перед нами — основная задача линейного программирования (ОЗЛП). Переход к ней от первоначальной задачи с ограничениями-неравенствами (5.3) «куплен» ценой увеличения числа переменных на два (число неравенств).

Всякая задача линейного программирования может быть сведена к стандартной форме ОЗЛП.

§3. Графический метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим метод графического решения ЗЛП на примере задачи технического контроля.

Задача технического контроля. В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контролеры разрядов 1 и 2. Норма выработки ОТК за 8 - часовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер разряда 1 проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролер разряда 2 проверяет 15 изделий в час; его точность составляет 95%.

Заработная плата контролера разряда 1 равна 4 руб. в час, контролер разряда 2 получает 3 руб. в час. При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в размере 2 руб. Фирма может использовать 8 контролеров разряда 1 и 10 контролеров разряда 2.

Руководство фирмы хочет определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Разработка модели. Пусть x1 и x2 обозначают количество контролеров разрядов 1 и 2 соответственно. Число контролеров каждого разряда ограничено, т.е. имеются следующие ограничения:

$x1 \le 8$ (разряд 1),
$x2 \le 10$ (разряд 2).

Ежедневно необходимо проверять не менее 1800 изделий. Поэтому выполняется неравенство

$8*25*x1+8*15*x2=200*x1+120*x2 \ge 1800$,
или $5*x1+3*x2 \ge 45$.

При построении целевой функции следует иметь в виду, что расходы фирмы, что расходы фирмы, связанные с контролем, включают две составляющие:

1) зарплату контролеров и
2) убытки, вызванные ошибками контролеров.

Расходы на одного контролера разряда 1 составляют

4 руб. +2*25*0,02=5 руб./ч.

Расходы на одного контролера разряда 2 равны

3 руб. +2*15*0,05=4,50 руб./ч.

Следовательно, минимизирующая целевая функция, выражающая ежедневные расходы на контроль, имеет вид

$z=8*(5*x1+4{,}5*x2)= 40x1+36*x2 \rightarrow \min$.

Можно сформулировать следующую задачу:
минимизировать $z=40*x1+36*x2$
при ограничениях:

$x1 \leq 8$, $x2 \leq 10$,
$5*x1+3*x2 \geq 45$,
$x1 \geq 0$, $x2 \geq 0$.

В этой задаче требуется найти значения переменных x1 и x2 , удовлетворяющие всем ограничениям и обеспечивающие минимальное значение целевой функции. В качестве первого шага решения следует определить все возможные неотрицательные значения переменных x1 и x2, которые удовлетворяют ограничениям. Например, координаты точки x1=8 и x2=10 положительны и для этой точки выполняются все ограничения. Такая точка называется допустимым решением. Множество всех допустимых решений называется допустимой областью. Решение задачи ЛП состоит в отыскании наилучшего решения в допустимой области. Лучшее допустимое решение задачи ЛП называется оптимальным. В рассматриваемом примере оптимальное решение представляет собой допустимое решение, минимизирующее целевую функцию 40*x1+36*x2. Значение целевой функции, соответствующее оптимальному решению, называется оптимальным значением задачи ЛП.

Для изображения допустимой области следует начертить графики всех ограничений. Все допустимые решения лежат в первом квадранте, поскольку значения переменных неотрицательны. В силу ограничения $5*x1+3*x2 \geq 45$ все допустимые решения (x1, x2) задачи располагаются по одну сторону от прямой, описываемой уравнением 5*x1+3*x2=45. Нужную полуплоскость можно найти, проверив, удовлетворяет ли начало координат рассматриваемому ограничению. Прямую 5x1+3*x2=45 удобно провести, соединяя пару подходящих точек (например, x1=0, x2=15 и x1=9, x2=0).

Поскольку начало координат не удовлетворяет ограничению, нужная полуплоскость отмечена стрелкой, направленной перпендикулярно прямой. Аналогичным образом представлены ограничения $x1 \leq 8$ и $x2 \leq 10$.

На рисунке 6.1 допустимая область (ABC) заштрихована. Ясно, что в допустимой области содержится бесконечное число допустимых точек. Нужно найти допустимую точку с наименьшим значением Z.

Если заранее зафиксировать значение целевой функции Z=40*x1+36*x2, то соответствующие ему точки будут лежать на некоторой прямой. При изменении величины Z эта прямая подвергается параллельному переносу. Рассмотрим прямые, соответствующие различным значениям Z, имеющие с допустимой областью хотя бы одну общую точку. Начальное значение Z положим равным 600. При приближении прямой к началу координат значение Z уменьшается. Если прямая имеет хотя бы одну общую точку с допустимой областью ABC, ее можно смещать в направлении начала координат. Ясно, что для прямой, проходящей через угловую точку A с координатами x1=8, x2=1.6, дальнейшее движение невозможно. Точка A представляет собой наилучшую допустимую точку, соответствующую наименьшему значению Z, равному 377.6. Следовательно, x1=8, x2=1.6 - оптимальное решение и Z=377.6 - оптимальное значение рассматриваемой задачи линейного программирования.

Таким образом, при оптимальном режиме работы ОТК необходимо использовать восемь контролеров разряда 1 и 1.6 контролеров разряда 2. Дробное значение x2=1.6 соответствует использованию одного из контролеров разряда 2 в течение неполного рабочего дня. При недопустимости неполной загрузки контролеров дробное значение обычно округляют, получая приближенное оптимальное целочисленное решение x1=8, x2=2.

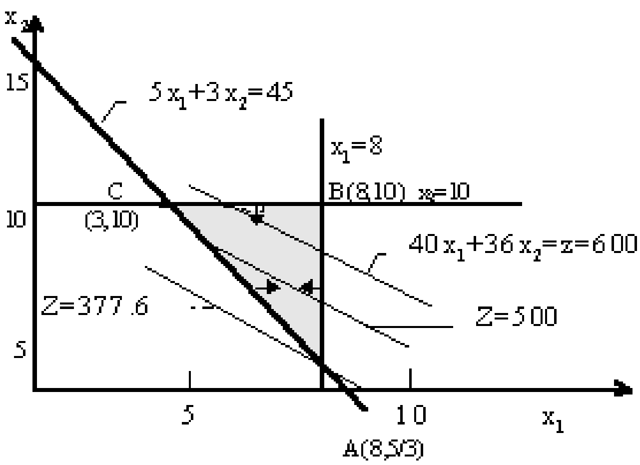


Рисунок 6.1 - Графическое решение задачи линейного программирования

§4. Решение задач линейного программирования симплекс-методом

В процессе производства постоянно возникают задачи определения оптимального плана производства продукции при наличии определенных ресурсов (сырья, полуфабрикатов, оборудования, финансов, рабочей силы) или проблемы оптимизации распределения неоднородных ресурсов на производстве. Рассмотрим возможную постановку такой задачи.

Постановка задачи

Для изготовления n видов изделий И1, И2, ..., Иn необходимы ресурсы m видов: трудовые, материальные, финансовые и др. Известно необходимое количество отдельного i-го ресурса для изготовления каждого j-го изделия. Назовем эту величину нормой расхода. Пусть определено количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент. Известна прибыль Пj, получаемая предприятием от изготовления каждого j-го изделия. Требуется определить, какие изделия и в каком количестве должно изготавливать предприятие, чтобы обеспечить получение максимальной прибыли. Необходимая исходная информация представлена в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Используемые ресурсы	Изготавливаемые изделия				Наличие ресурсов
	И1	И2	И3	И4	
Трудовые	3	5	2	7	15
Материальные	4	3	3	5	9
Финансовые	5	6	4	8	30
Прибыль Пj	40	50	30	20	

Построение математической модели.

Количество изделий j-го наименования, которое может производить предприятие, обозначим через xj. Зная количество каждого вида i-го ресурса для изготовления отдельного j-го типа изделия - норму расхода и количество каждого i-го ресурса (таблица 1), можно записать следующую систему неравенств:

$$
\begin{aligned}
&3x1 + 5x2 + 2x3 + 7x4 \le 15 \\
&4x1 + 3x2 + 3x3 + 5x4 \le 9 \\
&5x1 + 6x2 + 4x3 + 8x4 \le 30
\end{aligned}
\qquad (7.1)
$$

Полученную систему можно представить в виде совокупности равенств, если в каждое из неравенств ввести фиктивные изделия (дополнительные переменные) x5, x6, x7, при изготовлении которых используют каждый оставшийся вид ресурса.

В этом случае система равенств примет такой вид:

$$
\begin{aligned}
&3x1 + 5x2 + 2x3 + 7x4 + x5 = 15 \\
&4x1 + 3x2 + 3x3 + 5x4 + x6 = 9 \\
&5x1 + 6x2 + 4x3 + 8x4 + x7 = 30
\end{aligned}
\qquad (7.2)
$$

Это преобразование необходимо для упрощения вычислительной процедуры в дальнейшем. Прибыль, получаемая от фиктивных изделий, принимается равной нулю.

Критерий оптимизации (суммарную величину прибыли) можно тогда представить так:

$$Y = 40x1 + 50x2 + 30x3 + 20x4 + 0x5 + 0x6 + 0x7 \qquad (7.3)$$

Граничные условия будут записаны следующим образом:

$$xj \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 7) \qquad (7.4)$$

Совокупность системы ограничений (7.2), целевой функций (7.3) и граничных условий (7.4) образует математическую модель данной задачи.

Нахождение базисного решения.

Для решения данной задачи рассмотрим симплекс-метод. Для его использования необходимо определить начальный базис, то есть такое решение, которое удовлетворяет системе равенств (7.2).

В данной задаче для определения базиса требуется взять m неизвестных по числу уравнений в системе (7.2), желательно наиболее редко встречающиеся в ней. В нашей совокупности уравнений (m - 3) это x5, x6, x7, которые и выражаем через оставшиеся неизвестные x1, x2, x3, x4.

Систему уравнений необходимо записать в таком виде:

$$
\begin{aligned}
&x5 = 15 - (3x1 + 5x2 + 2x3 + 7x4) \\
&x6 = 9 - (4x1 + 3x2 + 3x3 + 5x4) \\
&x7 = 30 - (5x1 + 6x2 + 4x3 + 8x4)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Переменные, находящиеся в левой части системы уравнений, называются базисными (основными), а находящиеся справа - небазисными (не основными). Для определения значений базисных переменных x5, x6, x7 необходимо приравнять к нулю небазисные x1, x2, x3, x4 и подставить их в систему уравнений (5). Полученное таким образом решение называется базисным. Оно будет выглядеть следующим образом:

(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7)
(0, 0, 0, 0, 15, 9, 30).

После определения начального базиса можно переходить непосредственно к использованию алгоритма симплекс-метода.

Решение задачи симплекс-методом.

1. Заполнение исходной симплекс-таблицы.

В соответствии с полученной системой уравнений и критерием оптимизации заполняем исходную симплекс-таблицу (таблица 7.2).

Таблица 7.2

Базисные переменные	Свободные члены	Коэффициенты при базисных и небазисных переменных						
xj	ai	x1	x2*	x3	x4	x5	x6	x7
x5*	15	3	5*	2	7	1	0	0
x6	9	4	3	3	5	0	1	0
x7	30	5	6	4	8	0	0	1
Пj	0	40	50	30	20	0	0	0

2. Проверка базисного решения на оптимальность.

Просматриваются знаки коэффициентов при небазисных переменных в целевой функции (критерий оптимизации) - последняя строка таблицы 7.2.

Если все коэффициенты при небазисных переменных неположительны, то исходный базис является оптимальным; в противном случае переходят к следующему этапу. В нашей задаче решение не оптимально, так как все коэффициенты целевой функции при небазисных переменных положительны.

3. Проверка задачи на наличие решения.

Если при какой-либо небазисной переменной, имеющей положительный коэффициент в целевой функции, окажется, что столбец коэффициентов при этой же переменной в системе уравнений состоит из одних неположительных чисел, то максимальное значение целевой функции стремится к бесконечности, то есть задача решений не имеет. В нашей задаче решение имеется.

4. Выбор из небазисных переменных той, которая способна при введении ее в базис увеличить значение целевой функции.

Наиболее простой и чаще всего используемый способ состоит в выборе той небазисной переменной, которой соответствует наибольший положительный коэффициент в целевой функции. В нашей задаче это переменная x2 (наибольший положительный коэффициент равен 50). Значит, x2 необходимо ввести в базис.

5. Определение базисной переменной, которая должна быть выведена из базиса.

Для всех положительных коэффициентов при вводимой в базис переменной в системе уравнений определяется отношение свободного члена уравнения к коэффициенту при вводимой в базис переменной. Для нашей задачи это будут следующие отношения: 15/5 = 3; 9/3 = 3; 30/6 = 5.

Минимальное из полученных отношений указывает строку, базисную переменную, которая должна быть выведена из базиса. При наличии нескольких одинаковых отношений берется любое. В нашей задаче выведем из базиса переменную x5.

6. Представление новой базисной переменной через небазисные.

Строится новая симплекс-таблица (таблица 7.3). Отмечается звездочкой строка и столбец в предыдущей симплекс-таблице (таблица 7.2), соответственно для выводимой из базиса и для вводимой в него переменной. Коэффициент, находящийся на пересечении строки и столбца, отмеченных звездочками, называется разрешающим и помечается звездочкой (таблица 7.2). Все коэффициенты строки, отмеченной звездочкой, делятся на разрешающий элемент, а результаты расчета заносятся в новую симплекс-таблицу. В нашей задаче на первой итерации разрешающий элемент равен 5 (таблица 7.2).

Результаты деления каждого элемента строки, отмеченной звездочкой, на разрешающий коэффициент заносятся в строку 1 новой таблицы (таблица 7.3).

7. Представление остальных базисных переменных и целевой функции через новый набор небазисных переменных.

Для этого коэффициенты в новой таблице при новой базисной переменной умножаются на такое число, чтобы после сложения с преобразуемой строкой предыдущей таблицы в столбце при новой базисной переменной в новой таблице появился ноль. Результаты сложения заносятся в новую симплекс-таблицу. Исходя из этого, для получения коэффициентов второй строки в новой таблица 7.3 умножаем коэффициенты при новой базисной переменной x2 (таблица 7.3) на число -3, складываем с соответствующими коэффициентами второй строки предыдущей симплекс-таблицы (таблица 7.2) и результаты расчета заносим во вторую строку новой таблицы (таблица 7.3).

Аналогичные преобразования проводим и для других строк.

Таблица 7.3

Базисные переменные	Свободные члены	Коэффициенты при базисных и небазисных переменных						
xj	ai	x1	x2	x3*	x4	x5	x6	x7
x2	3	3/5	1	2/5	7/5	1/5	0	0
x6*	0	11/5	0	9/5*	4/5	-3/5	1	0
x7	12	7/5	0	8/5	-2/5	-6/5	0	1
Пj	-150	10	0	10	-50	-10	0	0

Поскольку в последней строке таблицы 7.3 в целевой функции не все коэффициенты при небазисных переменных неположительны, то решение не оптимально; следовательно, выполняется следующий итерационный цикл расчета и строится новая симплекс-таблица (таблица 7.4). Цикл расчета начинается с этапа 2 и проводится до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение.

В качестве вводимой в базис небазисной переменной берем x3 (можно x1) как имеющую наибольший положительный коэффициент. Отмечаем звездочкой столбец x3. В качестве выводимой из базиса переменной берем x6, так как для нее частное от деления свободного члена на соответствующий коэффициент минимально. Разрешающий множитель равен 9/5.

Результаты расчета представлены в таблице 7.4.

Таблица 7.4

Базисные переменные	Свободные члены	Коэффициенты при базисных и небазисных переменных						
xj	ai	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x2	3	1/9	1	0	1/9	1/3	-2/9	0
x3	0	11/9	0	1	4/9	-3/9	5/9	0
x7	12	-5/9	0	0	-10/9	-2/3	-8/9	1
Пj	-150	-20/9	0	0	-490/9	-20/3	-50/9	0

Последняя строка таблицы не содержит положительных коэффициентов при небазисных переменных. Анализируя полученное решение, видим, что оно оптимально и выглядит так:

(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7)
(0, 3, 0, 0, 0, 0, 12).

Из полученного решения видно, что изделия ИI, И3 и И4 предприятие изготавливать не должно. Цифра в переменной x2 определяет изделие, планируемое для изготовления, следовательно, предприятие будет производить только второе изделие в количестве 3 единиц.

Оптимальное распределение ресурсов обеспечит получение максимальной прибыли Y, которая составит 150 единиц.

При этом материальные и трудовые ресурсы будут задействованы полностью, а финансовые - недоиспользованы на 12 единиц.

§5. Транспортная задача. Методы нахождения начального решения транспортной задачи

Рассмотрим одну из задач линейного программирования — так называемую «транспортную задачу». Она ставится следующим образом: имеются m пунктов отправления (ПО) $A_1, A_2, ..., A_m$, в которых сосредоточены запасы каких-то однородных грузов в количестве соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц. Имеются n пунктов назначения (ПН) $B_1, B_2, ..., B_n$, подавших заявки соответственно па $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц груза. Сумма всех заявок равна сумме всех запасов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (8.1)$$

Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза от каждого пункта отправления A_i, до каждого пункта назначения B_j; ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$). Все числа c_{ij}, образующие прямоугольную таблицу (матрицу), заданы:

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{matrix} \qquad (8.2)$$

Коротко матрицу (8.2) будем обозначать (c_{ij}).

Считается, что стоимость перевозки нескольких единиц груза пропорциональна их числу.

Требуется составить такой план перевозок (откуда, куда и сколько единиц везти), чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок минимальна.

Поставим эту задачу как задачу линейного программирования. Обозначим x_{ij}, — количество единиц груза, отправляемого из i-го ПО A_i, в j-й ПН B_j. Неотрицательные переменные x_{ij} тоже можно записать в виде матрицы

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{matrix} \qquad (8.3)$$

которую мы будем коротко обозначать (x_{ij}). Совокупность чисел (x_{ij}) (8.3) мы будем называть «планом перевозок», а сами величины x_{ij} — «перевозками». Эти неотрицательные переменные должны удовлетворять следующим условиям.

1. Суммарное количество груза, направляемого из каждого ПО во все ПН, должно быть равно запасу груза в данном пункте. Это даст нам m условий-равенств:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} &= a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} &= a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} &= a_m \end{aligned} \qquad (8.4)$$

2. Суммарное количество груза, доставляемого в каждый ПН из всех ПО, должно быть равно заявке, поданной данным пунктом. Это даст нам n условий-равенств:

$x11 + \ x21 + \ \dots + \ xm1 = b1$
$x12 + \ x22 + \ \dots + \ xm2 = b2$ (8.5)
. . . .
$x1n + x2n + \dots + xmn = bn$

3. Суммарная стоимость всех перевозок, то есть сумма величин xij, умноженных на соответствующие стоимости cij, должна быть минимальной:

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} X_{i,j} \longrightarrow \min \qquad (8.6)$$

где знак двойной суммы означает, что суммирование производится по всем комбинациям индексов i и j, т. е. по всем парам ПО — ПН.

Перед нами — задача линейного программирования с условиями-равенствами (8.4), (8.5) и минимизируемой линейной функцией (8.6). Особенностью этой задачи является то, что все коэффициенты в условиях (8.4), (8.5) равны единице.

Условия-равенства (8.4), (8.5) не являются линейно независимыми, так как их правые части связаны условием (8.1). Число линейно независимых среди уравнений (8.4), (8.5) равно не m + n (числу уравнений), а m + n — 1. Общее число переменных xij, в нашей задаче равно m • n; как бы ни разрешать уравнения (8.4), (8.5), число базисных переменных будет равно m + n — 1, а число свободных переменных

$k = mn — (m + n— 1) = (m — 1) (n — 1).$

Для оптимального плана по крайней мере (m — 1) (n — 1) перевозок должны быть равны нулю (из соответствующих ПО в соответствующие ПН ничего не перевозится).

Будем называть любой план перевозок допустимым, если он удовлетворяет условиям (8.4), (8.5) (все заявки удовлетворены, все запасы исчерпаны). Допустимый план будем называть опорным, если в нем отличны от нуля не более m + n — 1 базисных перевозок, а остальные перевозки равны нулю. План (xij) будем называть оптимальным, если он, среди всех допустимых планов, приводит к минимальной суммарной стоимости перевозок (Y = min).

Транспортная таблица состоит из m строк и n столбцов. В правом верхнем углу каждой клетки будем ставить стоимость cij перевозки единицы груза из Ai, в Bj,, а центр клетки оставим свободным, чтобы помещать в нее саму перевозку xij. Клетку таблицы, соответствующую пунктам Ai, Bj, будем кратко обозначать (i, j).

Пример транспортной таблицы, где приведены условия задачи и стоимости перевозок, но нет еще самих перевозок, дан в таблице 10.1, где m = 4, n = 5.

Таблица 8.1

ПН ПО	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы, ai
A1	13	7	14	7	5	30
A2	11	8	12	6	8	48
A3	6	10	10	8	11	20
A4	14	8	10	10	15	30
Заявки, bj	18	27	42	15	26	128

Составим опорный план, применив «метод северо-западного угла». Заполнение транспортной таблицы начнем с левого верхнего («северо-западного») угла. Пункт B1 подал заявку па 18 единиц груза; удовлетворим ее из запасов пункта A1. После этого в нем остается еще 30—18=12 единиц груза; отдадим их пункту B2. Но заявка этого пункта еще не удовлетворена; выделим недостающие 15 единиц из запасов пункта A2 и т. д. Рассуждая точно таким же образом, заполним до конца перевозками xij транспортную таблицу (таблица 8.2).

Таблица 8.2

ПН ПО	В1	В2	В3	В4	В5	Запасы, ai
А1	13 18	7 12	14	7	5	30
А2	11	8 15	12 33	6	8	48
А3	6	10	10 9	8 11	11	20
А4	14	8	10	10 4	15 26	30
Заявки, bj	18	27	42	15	26	128

Проверим, является ли этот план допустимым: да, потому что в нем сумма перевозок по строке равна запасу соответствующего пункта отправления, а сумма перевозок по столбцу — заявке соответствующего пункта назначения. Значит, все в порядке — все заявки удовлетворены, все запасы израсходованы (сумма запасов равна сумме заявок и выражается числом 128, стоящим в правом нижнем углу таблицы).

В таблицах будем проставлять отличные от нуля перевозки, а клетки, соответствующие нулевым перевозкам, оставляем «свободными». Проверим, является ли план перевозок, данный в таблице 8.2, опорным. Число свободных клеток с нулевыми перевозками в таблице 8.2 равно как раз (m -1)(n - 1) = 3 * 4 = 12, так что план — опорный.

Этот план можно улучшить, если произвести в нем «циклическую перестановку» перевозок между клетками таблицы, уменьшив перевозки в «дорогой» клетке (2.3) со стоимостью 12, но зато увеличив перевозки в «дешевой» клетке (2.4) со стоимостью 6 (таблица 8.3).

Таблица 8.3

ПН ПО	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы, ai
A1	13 18	7 12	14	7	5	30
A2	11	8 15	12 33	6	8	48
A3	6	10	10 9	8 11	11	20
A4	14	8	10	10 4	15 26	30
Заявки, bj	18	27	42	15	26	128

Чтобы план оставался опорным, мы должны при этом сделать одну из свободных клеток базисной, а одну из базисных — свободной. Сколько единиц груза можем мы перенести по циклу (2.4) -> (3.4) -> (3.3) -> (2.3), увеличивая перевозки в нечетных вершинах цикла и уменьшая — в четных? Очевидно, не больше, чем 11 единиц (иначе перевозки в клетке (3.4) стали бы отрицательными). Очевидно, в результате циклического переноса допустимый план остается допустимым — баланс запасов и заявок не нарушается. Произведем этот перенос и запишем новый, улучшенный план перевозок в таблице 8.4.

Таблица 8.4

ПН ПО	B1	B2	B3	B4	B5	Запасы, ai
A1	13 18	- 7 12	14	7	+ 5	30
A2	11	+ 8 15	12 22	6 11 -	8	48
A3	6	10	10 20	8	11	20
A4	14	8	10	+ 10 4	- 15 26	30
Заявки, bj	18	27	42	15	26	128

Общая стоимость плана, показанного в таблице 8.3, равна

L1 = 18 • 13 + 12 • 7 + 15 • 8+ 33 • 12 +9 • 10 + 11 • 8 + 4 • 10 + 26 • 15=1442.

Общая стоимость плана, показанного в таблице 8.4, равна

L2 = 18•13 +12•7 +15•8 + 22•12 +11•6 +20•10+4•10+26•15 =1398.

Таким образом, нам удалось уменьшить стоимость перевозок на 1442 — 1398 == 44 единицы. Будем считать алгебраическую сумму стоимостей, стоящих в вершинах цикла, со знаком плюс, если перевозки в этой вершине увеличиваются, и со знаком минус — если уменьшаются (так называемая «цена цикла»), в данном случае равна: 6—8+10—12 = — 4. Значит, при переносе одной единицы груза по этому циклу стоимость перевозок уменьшается на четыре. А мы их перенесли целых 11; значит, стоимость должна была уменьшиться на 11•4=44 единицы, что и произошло.

Значит, весь секрет оптимизации плана перевозок в том, чтобы переносить («перебрасывать») перевозки по циклам, имеющим отрицательную цену.

В теории линейного программирования доказывается, что при опорном плане для каждой свободной клетки транспортной таблицы существует цикл, и притом единственный, одна вершина которого (первая) лежит в данной свободной клетке, а остальные — в базисных плетках. Поэтому, отыскивая «выгодные» циклы с отрицательной ценой, мы должны смотреть, — нет ли в таблице «дешевых» свободных клеток. Если такая клетка есть, нужно для нее найти цикл, вычислить его цену и, если она будет отрицательной, перенести по этому циклу столько единиц груза, сколько будет возможно (без того, чтобы какие-то перевозки сделать отрицательными). При этом данная свободная клетка становится базисной, а какая-то из бывших базисных — свободной. Очевидно, это равносильно «переразрешению» системы уравнений относительно других базисных переменных, но делается это гораздо легче.

Попробуем еще раз улучшить план, приведенный в таблице 8.4. Например, если улучшить план увеличив перевозки в клетке (1.5) со стоимостью 5 и уменьшив в других клетках. В таблице 8.4 найдем цикл, первая вершина которого лежит в свободной клетке (1.5), а остальные — все в базисных клетках.

Таблица 8.5

ПН ПО	В1	В2	В3	В4	В5	Запасы, ai
А1	13 18	7 1	14	7	5 11	30
А2	11	8 26	12 22	6	8	48
А3	6	10	10 20	8	11	20
А4	14	8	10	10 15	15 15	30
Заявки, bj	18	27	42	15	26	128

Это последовательность клеток (1.5) ->(4.5) ->(4.4) ->(2.4) ->(2.2) ->(1.2) (и замыкая цикл, снова возвращаемся в (1.5)). Нечетные вершины цикла отмечены плюсом — это значит, что перевозки в этих клетках увеличиваются: четные — знаком минус (перевозки уменьшаются). Цикл показан стрелками в таблице 8.4.

Подсчитаем цену этого цикла. Она равна 5—15+ 10—6+8—7= —5. Так как цена цикла отрицательна, то переброска перевозок по этому циклу выгодна. По этому циклу мы можем перебросить 11 единиц. Это определяется наименьшей перевозкой, стоящей в отрицательной вершине цикла. Умножая 11 на цену цикла —5, получим, что за счет переброски 11 единиц груза по данному циклу мы еще уменьшим стоимость перевозок на 55.

Таким образом, разыскивая в транспортной таблице свободные клетки с отрицательной ценой цикла и перебрасывая по этому циклу наибольшее возможное количество груза, мы будем все уменьшать и уменьшать стоимость перевозок. Бесконечно уменьшаться она не может (она никак не может стать меньше нуля!), значит, рано или поздно мы придем к оптимальному плану. Для такого плана уже не остается ни одной свободной клетки с отрицательной ценой цикла. Это — признак того, что оптимальное решение найдено.

В рассмотренной задаче сумма объемов ресурсов поставщиков равна сумме объемов ресурсов потребителей. Однако в некоторых случаях такое равенство отсутствует.

Если объем ресурсов всех поставщиков больше объема ресурсов всех потребителей, то вводят фиктивного потребителя B_{n+1} с объемом потребления равным

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (8.7)$$

Затраты на доставку единицы ресурса из пункта отправления до фиктивного пункта потребления должны быть обязательно равны между собой, и их принимают равными нулю:

$$C_{1,n+1} = C_{2,n+1} = \ldots = C_{m,n+1} = 0 \qquad (8.8)$$

Если объем ресурсов потребителей больше объема ресурсов поставщиков, то вводят фиктивного поставщика A_{m+1} с объемом поставки равным

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (8.9)$$

Затраты на доставку единицы ресурса из фиктивного пункта отправления до каждого пункта потребления должны быть обязательно равны между собой, и их принимают равными нулю:

$$C_{m+1,1} = C_{m+1,2} = \ldots = C_{m+1,n} = 0 \qquad (8.10)$$

По преобразованным таблицам расчет выполняется так же, как и для сбалансированной транспортной задачи.

§6. Решение распределительных задач линейного программирования

Постановка задачи

Пусть управление механизации имеет 5 кранов и требуется возвести 5 объектов. Известна себестоимость строительства каждым краном отдельного объекта. Требуется так распределить машины по объектам, чтобы обеспечить возведение всех объектов с минимальными суммарными затратами. Исходная информация представлена в таблице 9.1.

Таблица 9.1

Oj Ki	O1	O2	O3	O4	O5
K1	30	70	50	80	60
K2	20	40	40	50	70
K3	40	70	20	80	90
K4	90	70	30	80	100
K5	60	40	30	60	70

Построение математической модели

Введем переменные $X_{i,j}$, которые равны 1, если i-й кран работает на j-ом объекте и 0, если он не работает там.

Сформулируем ограничения в задаче:

1. Каждый кран может работать только на одном объекте. Это ограничение можно записать в таком виде:

$$
\begin{aligned}
&X11 + X12 + X13 + X14 + X15 = 1\\
&X21 + X22 + X23 + X24 + X25 = 1\\
&X31 + X32 + X33 + X34 + X35 = 1 \qquad (9.1)\\
&X41 + X42 + X43 + X44 + X45 = 1\\
&X51 + X52 + X53 + X54 + X55 = 1
\end{aligned}
$$

2. Каждый объект может возводиться только одним краном. Это ограничение можно записать так:

$$
\begin{aligned}
&X11 + X21 + X31 + X41 + X51 = 1\\
&X12 + X22 + X32 + X42 + X52 = 1\\
&X13 + X23 + X33 + X43 + X53 = 1 \qquad (9.2)\\
&X14 + X24 + X34 + X44 + X54 = 1\\
&X15 + X25 + X35 + X45 + X55 = 1
\end{aligned}
$$

В качестве критерия оптимизации принята суммарная себестоимость выполнения всех работ.

Обозначим через $c_{i,j}$ себестоимость возведения j-го объекта i-м краном. Тогда критерий оптимизации Y - суммарная себестоимость выполнения всех работ - запишется в таком виде:

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{i,j} x_{i,j} \qquad (9.3)$$

Совокупность ограничений (9.1) и (9.2) и целевой функции (9.3) образует математическую модель типичной экстремальной комбинаторной задачи. Ее решение представляет собой некоторую перестановку чисел, а количество перестановок с ростом n резко возрастает и равно N = n!. Она относится к классу задач линейного программирования, так как ограничения и целевая функция имеют линейный вид, то есть искомые величины находятся в первой степени.

Алгоритм решения

Для решения задач данного типа разработано много методов. Рассмотрим один из наиболее распространенных - венгерский.

Алгоритм этого метода включает четыре основных этапа. Для поиска оптимального решения потребуется не более чем n-2 последовательно проводимых итераций:

1. Получение нулей в каждой строке и каждом столбце

Находим наименьший элемент в каждой строке исходной таблицы (таблица 9.1), вычитаем его из всех ее элементов и получаем новую таблицу (таблица 9.2).

Таблица 9.2

Oj Ki	O1	O2	O3	O4	O5
K1	0	40	20	50	30
K2	0	20	20	30	50
K3	20	50	0	60	70
K4	60	40	0	50	70
K5	30	10	0	30	40

Аналогично производим действия для каждого столбца новой таблицы (таблица 9.2). Получаем таблицу 9.3.

Таблица 9.3

Oj Ki	O1	O2	O3	O4	O5
K1	0	30	20	20	0
K2	0	10	20	0	20
K3	20	40	0	30	40
K4	60	30	0	20	40
K5	30	0	0	0	10

2. Проверка решения на оптимальность

Ищем строку, содержащую наименьшее число нулей (в данной задаче строка 3), отмечаем звездочкой один из них и зачеркиваем все остальные нули этой строки и столбца, содержащего нуль со звездочкой. Аналогичные операции последовательно выполняем для всех строк. Если число нулей, отмеченных звездочкой, равно n, то решение является оптимальным, в противном случае следует переходить к следующему шагу. В данной задаче количество отмеченных звездочкой нулей не равно n, следовательно, решение не оптимально (таблица 9.4).

Таблица 9.4

$K_i \backslash O_j$	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
K_1	~~0~~	30	20	20	0^*
K_2	0^*	10	20	~~0~~	20
K_3	20	40	0^*	30	40
K_4	60	30	~~0~~	20	40
K_5	30	~~0~~	~~0~~	0^*	10

Переходим к следующему этапу.

3. Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих нули.

Необходимо отметить звездочкой:

а) все строки, не имеющие ни одного отмеченного звездочкой нуля (таблица 9.5, строка 4);

б) все столбцы, содержащие перечеркнутый нуль хотя бы в одной из отмеченных звездочкой строк (таблица 9.5, столбец 3);

в) все строки, содержащие отмеченные звездочкой нули хотя бы в одном из помеченных столбцов (таблица 9.5, строка 3). Далее повторяются поочередно действия б) и в) до тех пор, пока есть что отмечать.

Таблица 9.5

$K_i \backslash O_j$	O_1	O_2	O_3^*	O_4	O_5
K_1	~~0~~	30	20	20	0^*
K_2	0^*	10	20	~~0~~	20
K_3^*	20	40	0^*	30	40
K_4^*	60	30	~~0~~	20	40
K_5	30	~~0~~	~~0~~	0^*	10

После этого необходимо зачеркнуть каждую непомеченную строку и каждый помеченный столбец. Цель этого этапа - провести минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых, пересекающих, по крайней мере, один раз все нули.

4. Перестановка некоторых нулей.

Находится наименьший элемент в невычеркнутых клетках (таблица 9.5, число 20), вычитается из каждого элемента для непомеченных столбцов и прибавляется к каждому элементу непомеченной строки. Результаты расчета заносятся в новую таблицу (таблица 9.6).

Таблица 9.6

K_i \ O_j	O_1^*	O_2	O_3^*	O_4^*	O_5^*
K_1^*	0^*	30	40	20	~~0~~
K_2^*	~~0~~	10	40	0^*	20
K_3^*	~~0~~	20	~~0~~	10	20
K_4^*	40	10	0^*	~~0~~	20
K_5	30	0^*	20	~~0~~	10

Эта операция не изменяет оптимального решения. После нее выполняется новая итерация, цикл расчета начинается с этапа 2 и так до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Поскольку число нулей, отмеченных звездочкой, не равно n, выполняется новый итерационный цикл, после чего находится оптимальное решение (таблица 9.7).

Таблица 9.7

K_i \ O_j	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
K_1	~~0~~	20	40	20	0^*
K_2	0^*	~~0~~	40	~~0~~	20
K_3	~~0~~	10	0^*	10	20
K_4	40	~~0~~	~~0~~	0^*	20
K_5	40	0^*	30	10	20

Из полученного решения видно, что X15 = 1, X21 = 1, X33 = 1 и т.д. Это означает: чтобы оптимально распределить пять кранов на пять объектов, необходимо первый кран направить на пятый объект, второй - на первый, третий - на третий, четвертый кран возводит четвертый объект, а пятый кран возводит второй объект. Первая цифра в переменной X определяет машину, а вторая - объект работы, при этом суммарная себестоимость выполнения всех работ будет минимальной и составит Ymin = 220.

§7. Задачи целочисленного программирования. Понятие о нелинейном программировании

1. Задачи целочисленного программирования.

На практике часто встречаются задачи линейного программирования, в которых искомые значения переменных должны быть целыми. Такие задачи называются задачами целочисленного программирования; дополнительное условие целочисленности переменных затрудняет их решение.

Рассмотрим пример такой задачи. Пусть имеется ряд предметов (ценностей) $П_1, П_2, \ldots, П_n$, которые требуется перевезти из одного города в другой. Известны стоимости этих предметов: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и их веса $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Количество и вид предметов, которые можно перевезти, лимитируется грузоподъемностью Q машины. Требуется из всего набора предметов выбрать наиболее ценный набор (с максимальной суммарной стоимостью предметов), вес которого укладывается в Q.

Введем переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемые условием: $x_i = 1$, если в машину берётся предмет $П_i$, и $x_i = 0$,— если не берётся.

При заданных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суммарный вес предметов, которые берутся в машину, равен $q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n$. Условие ограниченной грузоподъемности запишется в виде неравенства:

$$q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n \le Q \qquad (10.1)$$

Запишем общую стоимость предметов, которую нужно максимизировать:

$$L = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \max \qquad (10.2)$$

Таким образом, задача похожа на обычную задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных $x1$, $x2$, ..., xn, которые удовлетворяют неравенству (10.1) и обращают в максимум линейную функцию этих переменных (10.2). На первый взгляд может показаться, что и решать ее надо как задачу линейного программирования, введя дополнительные ограничения-неравенства (каждый предмет — только один!):

$$x1 \le 1,\ x2 \le 1,\ \ldots,\ xn \le 1.$$

Найденное таким образом решение может оказаться не целым, а дробным, а значит неосуществимым. Данная задача отличается от обычной задачи линейного программирования: она представляет собой задачу целочисленного программирования.

Если задачу решать как обычную задачу линейного программирования и округлить полученные значения xi до ближайшего из целых чисел 0 или 1, то полученное таким образом решение даже может не удовлетворять ограничению (10.1), т. е. «не влезет» в данный вес Q. А если и «влезет», то может быть совсем не оптимальным.

Задачи целочисленного программирования гораздо труднее, чем обычные задачи линейного программирования. На практике применяется ряд методов решения подобных задач; все они (при сколько-нибудь значительном числе переменных) очень сложны и трудоемки.

2. Задачи нелинейного программирования

Общая постановка задачи нелинейного программирования следующая. Найти неотрицательные значения переменных $x1$, $x2$, ..., xn, удовлетворяющие каким-то ограничениям произвольного вида, например

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \qquad (10.3)$$
$$\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,$$

и обращающие в максимум произвольную нелинейную функцию этих переменных:

$$W = W(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow \max. \qquad (10.4)$$

Общих способов решения задачи нелинейного программирования не существует; в каждой конкретной задаче способ выбирается в зависимости от вида функции W и накладываемых на элементы решения ограничений.

Задачи нелинейного программирования па практике возникают довольно часто, например, когда затраты растут не пропорционально количеству закупленных или произведенных товаров (эффект «оптовости»), но многие нелинейные задачи могут быть приближенно заменены линейными, по крайней мере в области, близкой к оптимальному решению. Если это и невозможно, все же обычно нелинейные задачи, возникающие на практике, приводят к сравнительно «благополучным» формам нелинейности. В частности, нередко встречаются задачи «квадратичного программирования», когда W есть полином 2-й степени относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, а неравенства (10.3) линейны. В ряде случаев при решении задач нелинейного программирования может быть с успехом применен так называемый «метод штрафных функций», сводящий задачу поиска экстремума при наличии ограничений к аналогичной задаче при отсутствии ограничений, которая обычно решается проще. Идея метода состоит в том, что вместо того, чтобы наложить на решение жесткое требование вида $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ можно наложить некоторый достаточно большой «штраф» за нарушение этого условия и добавить к целевой функции $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ штраф вида $a\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ где a — коэффициент пропорциональности (в случае, когда целевая функция максимизируется, а отрицательно, если минимизируется — положительно). Далее можно, увеличивая абсолютное значение a, посмотреть, как изменяется при этом оптимальное решение $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, и, когда оно ужо практически перестает меняться, остановиться на нем. В ряде случаев при решении задач нелинейного программирования оказываются полезными так называемые «методы случайного поиска», состоящие в том, что вместо упорядоченного перебора возможных вариантов решения применяется случайный розыгрыш.

Раздел 3. Динамическое программирование

§1. Метод динамического программирования

Динамическое программирование - это особый метод оптимизации решений, специально приспособленный к так называемым «многошаговым» (или «многоэтапным») операциям.

Рассмотрим операцию O, состоящую из m шагов (этапов), например, деятельность отрасли промышленности в течение ряда хозяйственных лет.

Пусть эффективность операции характеризуется каким-то показателем W, который будем называть «выигрышем». Предположим, что выигрыш W за всю операцию складывается из выигрышей на отдельных шагах:

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i \tag{11.1}$$

где w_i, — выигрыш на i-м шаге.

Если W обладает таким свойством, то его называют «аддитивным критерием».

Операция O представляет собой управляемый процесс, т. е. мы можем выбирать какие-то параметры, влияющие на его ход и исход, причем на каждом шаге выбирается какое-то решение, от которого зависит выигрыш на данном шаге и выигрыш за операцию в целом. Такое решение называется «шаговым управлением». Совокупность всех шаговых управлений представляет собой управление операцией в целом. Обозначим его буквой x, а шаговые управления — буквами x_1, x_2, ..., x_m:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_m). \tag{11.2}$$

В общем случае $x_1, x_2, ..., x_m$ могут быть не только числа, а и векторы, функции и т. д. Требуется найти такое управление x, при котором выигрыш W обращается в максимум:

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i \quad \max \qquad (11.3)$$

То управление x*, при котором этот максимум достигается, будем называть оптимальным управлением. Оно состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений:

$$x^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_m). \qquad (11.4)$$

Тот максимальный выигрыш, который достигается при этом управлении, будем обозначать W*:

$$W^* = \max \{W(x)\}. \qquad (11.5)$$

Формула (11.5) читается так: величина W* есть максимум из всех W(x) при разных управлениях x (максимум берется по всем управлениям x, возможным в данных условиях).

Рассмотрим несколько примеров многошаговых операций и для каждого из них поясним, что понимается под «управлением» и каков «выигрыш» (показатель эффективности) W.

1. Планируется деятельность группы промышленных предприятий $П_1, П_2, ..., П_k$ на период m хозяйственных лет. В начале периода на развитие группы выделены какие-то средства M, которые должны быть как-то распределены между предприятиями. В процессе работы предприятия вложенные в него средства частично расходуются (амортизируются), а частично сохраняются и снова могут быть перераспределены. Каждое предприятие за год приносит доход, зависящий от того, сколько средств в него вложено. В начале каждого хозяйственного года имеющиеся в наличии средства перераспределяются между предприятиями. Ставится вопрос: какое количество средств в начале каждого года нужно выделять каждому предприятию, чтобы суммарный доход за m лет был максимальным?

Выигрыш W (суммарный доход) представляет собой сумму доходов на отдельных шагах (годах):

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i \qquad (11.6)$$

и, значит, обладает свойством аддитивности.

Управление x_i, на i-м шаге состоит в том, что в начале i-го года предприятиям выделяются какие-то средства $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}$ (первый индекс — номер шага, второй — номер предприятия). Таким образом, шаговое управление есть вектор с k составляющими:

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}). \qquad (11.7)$$

Величины w_i в формуле (11.6) зависят от количества вложенных в предприятия средств.

Управление x всей операцией состоит из совокупности всех шаговых управлений:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_m). \qquad (11.8)$$

Требуется найти такое распределение средств по предприятиям и по годам (оптимальное управление x*), при котором величина W обращается в максимум.

В этом примере шаговые управления были векторами.

2. Космическая ракета состоит из m ступеней, а процесс ее вывода на орбиту — из m этапов, в конце каждого из которых очередная ступень сбрасывается. На все ступени (без учета «полезного» веса кабины) выделен какой-то общий вес:

$$G = G_1+G_2+...+G_m,$$

где G_i — вес i-й ступени.

В результате i-го этапа (сгорания и сбрасывания i-й ступени) ракета получает приращение скорости Δt , зависящее от веса данной ступени и суммарного веса всех оставшихся плюс вес кабины. Спрашивается, как нужно распределить вес G между ступенями, чтобы скорость ракеты V при ее выводе на орбиту была максимальна?

В данном случае показатель эффективности (выигрыш) будет

$$V = \sum_{i=1}^{m} \Delta_i \qquad (11.9)$$

где Δ_i—выигрыш (приращение скорости) на i-м шаге.

Управление x представляет собой совокупность весов всех ступеней G_i:

$$x = (G_1, G_2, ..., G_m).$$

Оптимальным управлением x* будет то распределение весов по ступеням, при котором скорость V максимальна. В этом примере шаговое управление — одно число, а именно, вес данной ступени.

3. Владелец автомашины эксплуатирует ее в течение m лет. В начале каждого года он может принять одно из трех решений:

1) продать машину и заменить ее новой;

2) ремонтировать ее и продолжать эксплуатацию;

3) продолжать эксплуатацию без ремонта.

Шаговое управление — выбор одного из этих трех решений. Непосредственно числами они не выражаются, но можно приписать первому численное значение 1, второму 2, третьему 3. Какие нужно принять решения по годам (т. е. как чередовать управления 1, 2, 3), чтобы суммарные расходы на эксплуатацию, ремонт и приобретение новых машин были минимальны?

Показатель эффективности (в данном случае это не «выигрыш», а «проигрыш») равен

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i \qquad (11.10)$$

где w_i — расходы в i-м году. Величину W требуется обратить в минимум.

Управление операцией в целом представляет собой какую-то комбинацию чисел 1, 2, 3, например:

$$x = (3, 3, 2, 2, 2, 1, 3, \ldots),$$

что означает: первые два года эксплуатировать машину без ремонта, последующие три года ее ремонтировать, в начале шестого года продать, купить новую, затем снова эксплуатировать без ремонта и т. д. Любое управление представляет собой вектор (совокупность чисел):

$$x = (j_1, j_2, \ldots, j_m), \qquad (11.11)$$

где каждое из чисел $j_1, j_2, \ldots, j_m$ имеет одно из трех значений: 1, 2 или 3. Нужно выбрать совокупность чисел (11.11), при которой величина (11.10) минимальна.

Любую многошаговую задачу можно решать по-разному: либо искать сразу все элементы решения на всех m шагах, либо же строить оптимальное управление шаг за шагом, на каждом этапе расчета оптимизируя только один шаг. Обычно второй способ оптимизации оказывается проще, чем первый, особенно при большом числе шагов.

Такая идея постепенной, пошаговой оптимизации и лежит в основе метода динамического программирования. Оптимизация одного шага, как правило, проще оптимизации всего процесса: лучше много раз решить сравнительно простую задачу, чем один раз — сложную.

Принцип динамического программирования не предполагает, что каждый шаг оптимизируется отдельно, независимо от других. Шаговое управление должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем.

Пусть, например, планируется работа группы промышленных предприятий, из которых часть занята выпуском предметов потребления, а остальные производят для них машины. Задача операции — получить за m лет максимальный объем выпуска предметов потребления. Допустим, планируются капиталовложения на первый год. Исходя из узких интересов этого шага (года), мы должны были бы все наличные средства вложить в производство предметов потребления. Но такое решение будет неверным с точки зрения эффективности операции в целом, т.к. имея в виду будущее, надо выделить какую-то долю средств и на производство машин. От этого объем продукции за первый год, конечно, снизится, зато будут созданы условия для его увеличения в последующие годы.

Планируя многошаговую операцию, надо выбирать управление на каждом шаге с учетом всех его будущих последствий на еще предстоящих шагах. Управление на i-м шаге выбирается не так, чтобы выигрыш именно на данном шаге был максимален, а так, чтобы была максимальна сумма выигрышей на всех оставшихся до конца шагах плюс данный.

Из этого правила есть исключение - последний шаг, единственный из всех, можно планировать так, чтобы он сам принес наибольшую выгоду.

Поэтому процесс динамического программирования обычно разворачивается от конца к началу: прежде всего планируется последний, m-й шаг. Планируя последний шаг, нужно сделать разные предположения о том, чем кончился предпоследний, (m — 1)-й шаг, и для каждого из этих предположений найти условное оптимальное управление на m-м шаге («условное» потому, что оно выбирается исходя из условия, что предпоследний шаг кончился так-то и так-то).

Предположим, что это сделано, и для каждого из возможных исходов предпоследнего шага знаем условное оптимальное управление и соответствующий ему условный оптимальный выигрыш на m-м шаге. Теперь можно оптимизировать управление на предпоследнем, (m — 1)-м шаге. Снова сделаем все возможные предположения о том, чем кончился предыдущий, (m — 2)-й шаг, и для каждого из этих предположений найдем такое управление на (m—1)-м шаге, при котором выигрыш за последние два шага (из которых m-й уже оптимизирован!) максимален. Так находим для каждого исхода (m — 2)-го шага условное оптимальное управление на (m — 1)-м шаге и условный оптимальный выигрыш на двух последних шагах. Далее, «пятясь назад», оптимизируем управление на (m — 2)-м шаге и т. д., пока не дойдем до первого.

Предположим, что все условные оптимальные управления и условные оптимальные выигрыши на всех шагах процесса известны. Теперь можно построить уже не условно оптимальное, а просто оптимальное управление x* и найти не условно оптимальный, а просто оптимальный выигрыш W*.

Таким образом, в процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс «проходится» дважды: первый раз — от конца к началу, в результате чего находятся условные оптимальные управления и условные оптимальные выигрыши за оставшийся «хвост» процесса; второй раз — от начала к концу, когда остается только «прочитать» уже готовые рекомендации и найти безусловное оптимальное управление x*, состоящее из оптимальных шаговых управлений x1*, x2*, ... , xm*.

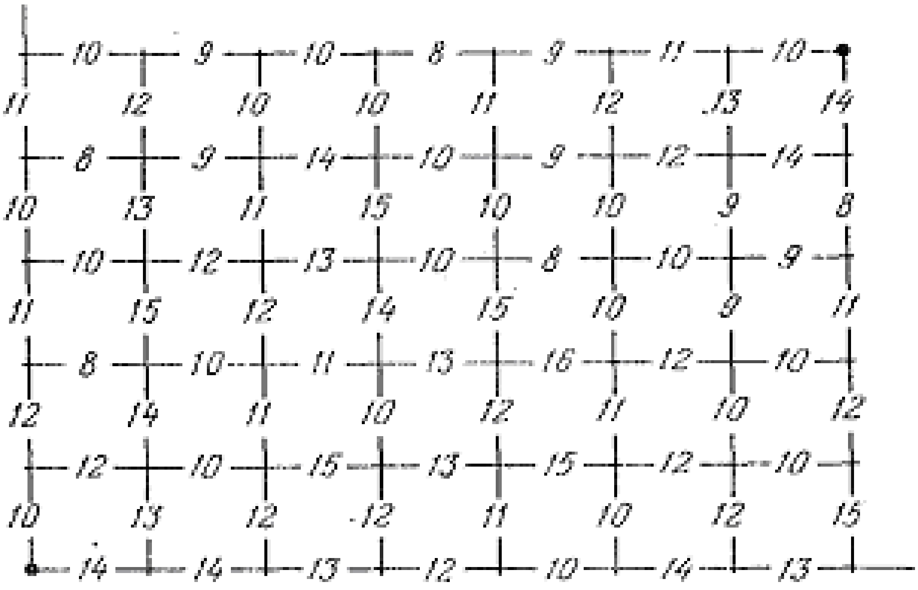
§2. Примеры решения задач динамического программирования

1. Прокладка наивыгоднейшего пути между двумя пунктами. Требуется проложить путь, соединяющий два пункта А и В, из которых второй лежит к северо-востоку от первого.

Для простоты допустим, что прокладка пути состоит из ряда шагов, и на каждом шаге можно двигаться либо строго на восток, либо строго на север; любой путь из А в В представляет собой ступенчатую ломаную линию, отрезки которой параллельны одной из координатных осей (рисунок 12.1). Затраты на сооружение каждого из таких отрезков известны. Требуется проложить такой путь из А в В, при котором суммарные затраты минимальны.

Разделим расстояние от А до В в восточном направлении, например, на 7 частей, а в северном — на 5 частей (в принципе дробление может быть сколь угодно мелким). Тогда любой путь из А в В состоит из m = 7 + 5 = 12 отрезков, направленных на восток или на север (рисунок 12.2). Проставим на каждом из отрезков число, выражающее (в условных единицах) стоимость прокладки пути но этому отрезку. Требуется выбрать такой путь из А в В, для которого сумма чисел, стоящих на отрезках, минимальна.

Y (север) B



A

X (восток)

Рисунок 12.2

Будем рассматривать сооружаемый путь как управляемую систему S, перемещающуюся под влиянием управления из начального состояния A в конечное B. Состояние этой системы перед началом каждого шага будет характеризоваться двумя координатами: восточной (x) и северной (y), обе—целочисленные ($0 \le x \le 7$, $0 \le y \le 5$).

Для каждого из состояний системы (узловой точки прямоугольной сетки на рисунке 12.2) требуется найти условное оптимальное управление: идти из этой точки на север (управление «с») или на восток (управление «в»). Выбирается это управление так, чтобы стоимость всех оставшихся до конца шагов (включая данный) была минимальна. Эту стоимость будем называть «условным оптимальным выигрышем» для данного состояния системы S перед началом очередного шага.

Процедуру условной оптимизации будем разворачивать в обратном направлении — от конца к началу. Прежде всего, произведем условную оптимизацию последнего, 12-го шага. Рассмотрим отдельно правый верхний угол прямоугольной сетки (рисунок 12.3). После 11-го шага будем находится там, откуда за один (последний) шаг можно попасть в B, т. е. в одной из точек B1 или B2.

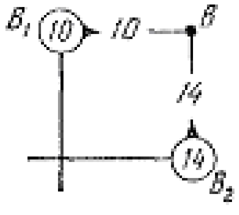


Рисунок 12.3

Если находимся в точке B1 - выбора нет (управление вынужденное): надо идти на восток, и это обойдется в 10 единиц. Запишем это число 10 в кружке у точки B1, а оптимальное управление покажем короткой стрелкой, исходящей из B1 и направленной на восток. Для точки B2 управление тоже вынужденное (север), расход до конца равен 14, запишем его в кружке у точки B2. Таким образом, условная оптимизация последнего шага сделана, и условный оптимальный выигрыш для каждой из точек B1, B2 найден и записан в соответствующем кружке.

Оптимизируем предпоследний (11-й) шаг. После 10-го шага можно оказаться в одной из точек C1, C2, C3 (рисунок 12.4).

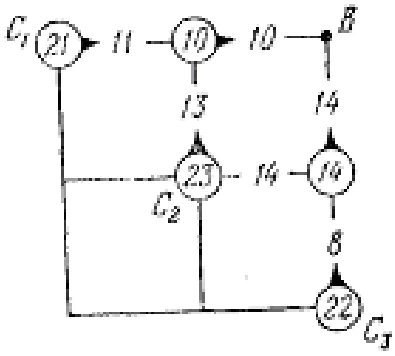


Рисунок 12.4

Найдем для каждой из них условное оптимальное управление и условный оптимальный выигрыш. Для точки С1 управление вынужденное: идти на восток; обойдется это до конца в 21 единицу (11 на данном шаге, плюс 10, записанных в кружке при В1). Число 21 записываем в кружке при точке С1. Для точки С2 управление уже не вынужденное: можно идти как на восток, так и на север. В первом случае затраты на данном шаге составят 14 единиц и от В2 до конца — еще 14, всего 28 единиц. Если пойдем на север, затратим 13 + 10, всего 23 единицы. Значит, условное оптимальное управление в точке С2 — идти на север (отмечаем это стрелкой, а число 23 записываем в кружке у С2). Для точки С3 управление снова вынужденное («с»), обойдется это до конца в 22 единицы (ставим стрелку на север, число 22 записываем в кружке при С3).

Аналогично, «пятясь» от предпоследнего шага назад, найдем для каждой точки с целочисленными координатами условное оптимальное управление («с» или «в»), которое обозначим стрелкой, и условный оптимальный выигрыш (расход до конца пути), который запишем в кружке. Вычисляется он так: расход на данном шаге складывается с уже оптимизированным расходом, записанным в кружке, куда ведет стрелка. Таким образом, на каждом шаге мы оптимизируем только этот шаг, а следующие за ним — уже оптимизированы. Конечный результат процедуры оптимизации показан на рисунке 12.5.

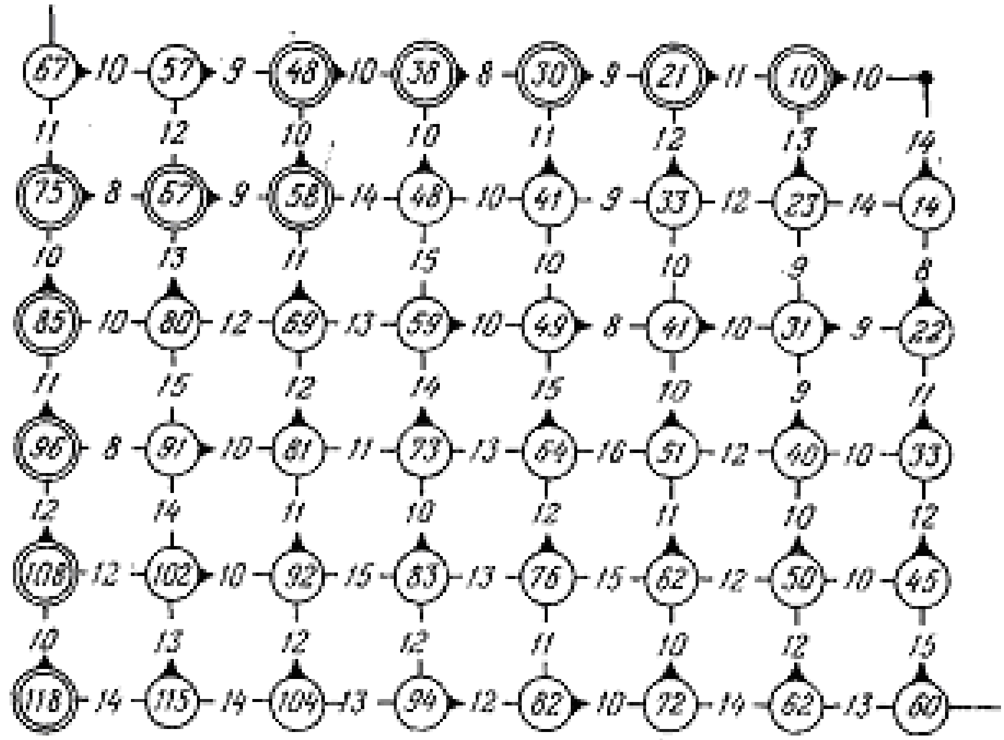
В кружке при точке А записан оптимальный выигрыш на все сооружение пути из А в В: W* = 118.

Построим безусловное оптимальное управление — траекторию, ведущую из А и В самым дешевым способом. Такая оптимальная траектория отмечена на рисунке 12.5 дважды обведенными кружками. Соответствующее безусловное оптимальное управление будет:

x* = (с, с, с, с, в, в, с, в, в, в, в, в),

т. е. первые четыре шага - на север, следующие два — на восток, затем опять один на север и остальные пять — на восток. Задача решена.

Y (север)



A X (восток)

Рисунок 12.5

В ходе условной оптимизации можно столкнуться со случаем, когда оба управления для какой-то точки на плоскости являются оптимальными, т. е. приводят к одинаковому расходу средств от этой точки до конца. Например, в точке с координатами (5; 1) оба управления «с» и «в» являются оптимальными и дают расход до конца равным 62. Из них произвольно выбирается любое (в данном случае выбрали «с»). Такие случаи неоднозначного выбора оптимального управления постоянно встречаются в динамическом программировании; от этого может зависеть оптимальное управление всем процессом, но не оптимальный выигрыш.

2. Задача о распределении ресурсов. Метод динамического программирования позволяет решать многие экономические задачи. Рассмотрим одну из простейших таких задач. В нашем распоряжении имеется какой-то запас средств (ресурсов) К, который должен быть распределен между m предприятиями П1, П2, ..., Пm. Каждое из предприятий Пi при вложении в него каких-то средств x приносит доход, зависящий от x, т. е. представляющий собой какую-то функцию $\varphi i(x)$. Все функции $\varphi i(x)$ (i = 1, 2, ..., m) заданы. Спрашивается, как нужно распределить средства К между предприятиями, чтобы в сумме они дали максимальный доход?

Эта задача решается методом динамического программирования. Хотя в своей постановке она не содержит упоминания о времени, можно все же операцию распределения средств мысленно развернуть в какой-то последовательности, считая за первый шаг вложение средств в предприятие П1, за второй — в П2 и т. д.

Управляемая система S в данном случае — средства или ресурсы, которые распределяются. Состояние системы S перед каждым шагом характеризуется одним числом S — наличным запасом еще не вложенных средств. В этой задаче «шаговыми управлениями» являются средства x1, x2, ..., xm, выделяемые предприятиям. Требуется найти оптимальное управление, т. е. такую совокупность чисел x1, x2, ..., xm, при которой суммарный доход максимален:

$$W = \sum_{i=1}^{m} \varphi i\,(xi)\ \max \qquad (12.1)$$

Решим эту задачу сначала в общем, формульном виде, а потом — для конкретных числовых данных. Найдем для каждого i-го шага условный оптимальный выигрыш (от этого шага и до конца), если мы подошли к данному шагу с запасом средств S. Обозначим условный оптимальный выигрыш $W_i(S)$, а соответствующее ему условное оптимальное управление — средства, вкладываемые в i-е предприятие, — $x_i(S)$.

Начнем оптимизацию с последнего, m-го шага. Пусть мы подошли к этому шагу с остатком средств S. Вложим всю сумму S целиком в предприятие $П_m$. Условное оптимальное управление на m-м шаге: отдать последнему предприятию все имеющиеся средства S, т. е.

$$x_m(S) = S,$$

а условный оптимальный выигрыш

$$W_m(S) = \varphi_m(S).$$

Задавая значения S, мы для каждого значения S будем знать $x_m(S)$ и $W_m(S)$. Последний шаг оптимизирован.

Перейдем к предпоследнему, (m — 1)-му шагу. Пусть мы подошли к нему с запасом средств S. Обозначим $W_{m-1}(S)$ условный оптимальный выигрыш на двух последних шагах: (m — 1)-м и m-м (который уже оптимизирован). Если мы выделим на (m—1)-м шаге (m—1)-му предприятию средства x, то на последний шаг останется S — x. Наш выигрыш на двух последних шагах будет равен

$$\varphi_{m-1}(x) + W_m(S - x),$$

и нужно найти такое x, при котором этот выигрыш максимален:

$$W_{m-1}(S) = \max_{x \le S} \{\varphi_{m-1}(x) + W_m(S - x)\}. \qquad (12.2)$$

Знак max означает, что берется максимальное значение по всем x какие

$x \le S$

только возможны , от выражения, стоящего в фигурных скобках. Этот максимум и есть условный оптимальный выигрыш за два последних шага, а то значение x, при котором этот максимум достигается,— условное оптимальное управление на (m—1)-м шаге. Далее оптимизируем (m — 2)-й, (m — 3)-й и т. д. шаги. Вообще, для любого i-го шага будем находить условный оптимальный выигрыш за все шаги с этого и до конца по формуле

$$W_i(S) = \max_{x \le S} \{(\varphi_i(x) + W_{i+1} (S - x)\} \qquad (12.3)$$

и соответствующее ему условное оптимальное управление $x_i(S)$ — то значение x, при котором этот максимум достигается.

Продолжая таким образом, дойдем, наконец, до 1-го предприятия П1. Здесь не нужно будет вычислять значения S; мы точно знаем, что запас средств перед первым шагом равен К:

$$W^* = W_1 (К) = \max_{x \le К} \{\varphi_1(x) + W_2(К - x)\}. \qquad (12.4)$$

Максимальный выигрыш (доход) от всех предприятий найден. Значение x, при котором достигается максимум (12.4), и есть оптимальное управление x_1^* на 1-м шаге. После того как мы вложим эти средства в 1-е предприятие, у нас их останется К—x_1^*. Выделяем второму предприятию оптимальное количество средств: $x_2^* = x_2(К-x_1^*)$, и т. д. до конца.

Решим численный пример. Исходный запас средств К =10 (условных единиц), и требуется его оптимальным образом распределить между пятью предприятиями (m = 5). Для простоты предположим, что вкладываются только целые количества средств. Функции дохода $\varphi_i(x)$ заданы в таблице 12.1.

Таблица 12.1

x	φ1(x)	φ2(x)	φ3(x)	φ4(x)	φ5(x)
1	0,5	0,1	0,6	0,3	1,0
2	1,0	0,5	1,1	0,6	1,2
3	1,4	1,2	1,2	1,3	1,3
4	2,0	1,8	1,4	1,4	1,3
5	2,5	2,5	1,6	1,5	1,3
6	2,8	2,9	1,7	1,5	1,3
7	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3
8	3,0	3,5	1,8	1,5	1,3

В каждом столбце, начиная с какой-то суммы вложений, доходы перестают возрастать (реально это соответствует тому, что каждое предприятие способно «освоить» лишь ограниченное количество средств).

Произведем условную оптимизацию так, как это было описано выше, начиная с последнего, 5-го шага. Каждый раз, когда мы подходим к очередному шагу, имея запас средств S, мы пробуем выделить на этот шаг то или другое количество средств, берем выигрыш на данном шаге по таблице 12.1, складываем с уже оптимизированным выигрышем на всех последующих шагах до конца (учитывая, что средств у нас осталось уже меньше, как раз на такое количество средств, которое мы выделили) и находим то вложение, на котором эта сумма достигает максимума. Это вложение и есть условное оптимальное управление на данном шаге, а сам максимум — условный оптимальный выигрыш.

В таблице 12.2 даны результаты условной оптимизации по всем шагам. Таблица построена так: в первом столбце даются значения запаса средств S, с которым мы подходим к данному шагу. Далее таблица разделена на пять пар столбцов, соответственно номеру шага. В первом столбце каждой пары приводится значение

Таблица 12.2

S	i = 5		i = 4		i = 3		i = 2		i = 1	
	x5(S)	W5(S)	x4(S)	W4(S)	x3(S)	W3(S)	x2(S)	W2(S)	x1(S)	W1(S)
1	1	1,0	0	1,0	0	1,0	0	1,0		
2	2	1,2	1	1,3	1	1,6	0	1,6		
3	3	1,3	2	1,6	2	2,1	0	2,1		
4	4	1,3	3	2,3	2	2,4	0	2,4		
5	5	1,3	3	2,5	1	2,9	0	2,9		
6	6	1,3	4	2,6	2	3,4	5	3,5		
7	7	1,3	5	2,7	2	3,6	5	4,1		
8	8	1,3	5	2,8	4	3,7	5	4,6		
9	9	1,3	6	2,8	5	3,9	7	5,1		
10	10	1,3	7	2,8	5	4,1	7	5,6	2	5,6

условного оптимального управления, во втором — условного оптимального выигрыша. Таблица заполняется слева направо, сверху вниз. Решение на пятом — последнем — шаге вынужденное: выделяются все средства; на всех остальных шагах решение приходится оптимизировать. В результате последовательной оптимизации 5-го, 4-го, 3-го, 2-го и 1-го шагов мы получим полный список всех рекомендаций по оптимальному управлению и безусловный оптимальный выигрыш W* за всю операцию — в данном случае он равен 5,6. В последних двух столбцах таблицы 12.2 заполнена только одна строка, так как состояние системы перед началом первого шага нам в точности известно: So = К = 10. Оптимальные управления на всех шагах выделены рамкой. Таким образом, мы получили окончательный вывод: надо выделить первому предприятию две единицы из десяти, второму — пять единиц, третьему — две, четвертому — ни одной, пятому — одну единицу. При этом распределении доход будет максимален и равен 5,6.

Чтобы было понятно, как заполняется таблица 12.2, продемонстрируем это на одном образце расчета. Пусть, например, нужно оптимизировать решение x3(7) — как поступать на третьем шаге, если мы подошли к нему с запасом средств S = 7, и сколько максимум мы можем выиграть на всех оставшихся

Таблица 12.3

x	7 – x	φ3(x)	W4(7 - x)	φ3(x) + W4(7 - x)
7	0	1,8	0,3	1,8
6	1	1,7	0,6	2,7
5	2	1,6	1,3	2,9
4	3	1,4	1,4	3,0
3	4	1,2	1,5	3,5
2	5	1,1	1,5	3,6
1	6	0,6	1,5	3,2
0	7	0	1,5	2,7

шагах, включая третий? Предположим, что все шаги после третьего (4-й и 5-й) уже оптимизированы, т. е. заполнены две первые пары столбцов таблицы 12.2. Найдем x3(7) и W3(7). Для этого составим вспомогательную табличку (см. таблицу 12.3). В первом ее столбце перечислены все возможные вложения x на третьем шаге, не превосходящие S = 7. Во втором столбце — то, что останется после такого вложения от запаса средств S =7. В третьем столбце — выигрыш на третьем шаге от вложения средств x в третье предприятие (заполняется по столбцу φ3(x) таблицы 12.1). В четвертом столбце — оптимальный выигрыш на всех оставшихся шагах (четвертом и пятом) при условии, что мы подошли к четвертому шагу с оставшимися средствами (заполняется по столбцу i = 4 таблицы 12.2). В пятом столбце — сумма двух выигрышей: шагового и оптимизированного дальнейшего при данном вложении x в третий шаг.

Из всех выигрышей последнего столбца выбирается максимальный (в таблице 12.3 он равен W3 (7) = 3,6, а соответствующее управление x(7) =2).

Если во вспомогательной таблице типа 12.3 максимум достигается не при одном x, а при двух или больше - совершенно все равно, какое из них выбрать; от этого выигрыш не зависит. В задачах динамического программирования решение вовсе не должно быть единственным.

3. Задача о загрузке машины. Пользуясь методом динамического программирования, решим задачу о загрузке машины: имеется определенный набор предметов П1, П2, ..., Пn (каждый в единственном экземпляре); известны их веса q1, q2, ..., qn и стоимости c1, c2, ..., cn. Грузоподъемность машины равна Q. Спрашивается, какие из предметов нужно взять в машину, чтобы их суммарная стоимость (при суммарном весе ≤ Q) была максимальна?

Процесс загрузки машины можно представлять себе как состоящий из n шагов; на каждом шаге мы отвечаем на вопрос: брать данный предмет в машину или не брать? Управление на i-м шаге равно единице, если мы данный (i-й) предмет берем, и нулю — если не берем.

Состояние системы S характеризуется весом S, который еще остался в нашем распоряжении до конца (полной загрузки машины) после того, как предыдущие шаги выполнены (какие-то предметы погружены в машину). Для каждого из значений S мы должны найти Wi(S) — суммарную максимальную стоимость предметов, которыми можно «догрузить» машину при данном значении S, и положить xi(S) = 1, если мы данный (i-й) предмет берем в машину, и xi(S) = 0, если не берем.

Решим числовой пример: имеется шесть предметов, веса и стоимости которых указаны в таблице 12.4.

Таблица 12.4

Предмет Пi	П1	П2	П3	П4	П5	П6
Вес qi	4	7	11	12	16	20
Стоимость ci	7	10	15	20	27	34

Суммарная грузоподъемность машины Q = 35 единиц веса. Требуется указать номера предметов, которые нужно включить в груз, чтобы их суммарная стоимость была максимальна.

Будем придавать S только целые значения. Условная оптимизация решения показана в таблице 12.5, где в каждой строке для соответствующего номера шага (номера предмета) приведены: условное оптимальное управление xi (0 или 1) и условный оптимальный выигрыш Wi (стоимость всех оставшихся до конца предметов при оптимальном управлении на всех шагах).

В таблице 12.5 выделены: оптимальный выигрыш W* = 57 и оптимальные шаговые управления, при которых этот выигрыш достигается: x1* = 0, x2* = 1, x3* = 0, x4* = 1, x5* = 1, x6* = 0, т. е. загрузить машину надо предметами 2, 4 и 5, суммарный вес которых равен в точности 35 (при оптимальном выборе грузов может быть и некоторый общий «недогруз»).

В этой задаче, возможно, было бы проще искать решение «простым перебором», пробуя все возможные комбинации предметов, проверяя на каждой из них, «влезают» ли они в заданный вес, и выбирая ту, для которой стоимость максимальна. Но при большом числе предметов это было бы затруднительно: число комбинаций растет при увеличении числа предметов. Для метода же динамического программирования увеличение числа шагов только приводит к пропорциональному возрастанию объема расчетов.

Таблица 12.5

S	i = 6		i = 5		i = 4		i = 3		i = 2		i = 1	
	xi	Wi	xi	Wi	xi	Wi	xi	Wi	xi	Wi	xi	Wi
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10		

11	0	0	0	0	0	0	1	15	0	15		
12	0	0	0	0	1	20	0	20	0	20		
13	0	0	0	0	1	20	0	20	0	20		
14	0	0	0	0	1	20	0	20	0	20		
15	0	0	0	0	1	20	0	20	0	20		
16	0	0	1	27	0	27	0	27	0	27		
17	0	0	1	27	0	27	0	27	0	27		
18	0	0	1	27	0	27	0	27	0	27		
19	0	0	1	27	0	27	0	27	1	30		
20	1	34	0	34	0	34	0	34	0	34		
21	1	34	0	34	0	34	0	34	0	34		
22	1	34	0	34	0	34	0	34	0	34		
23	1	34	0	34	0	34	1	35	1	37		
24	1	34	0	34	0	34	1	35	1	37		
25	1	34	0	34	0	34	1	35	1	37		
26	1	34	0	34	0	34	1	35	1	37		
27	1	34	0	34	0	34	1	42	1	44		
28	1	34	0	34	1	47	0	47	0	47		
29	1	34	0	34	1	47	0	47	0	47		
30	1	34	0	34	1	47	0	47	0	47		
31	1	34	0	34	1	47	1	49	0	49		
32	1	34	0	34	1	54	0	54	0	54		
33	1	34	0	34	1	54	0	54	0	54		
34	1	34	0	34	1	54	0	54	0	54		
35	1	34	0	34	1	54	0	54	1	57	0	57

§3. Задача динамического программирования в общем виде. Принцип оптимальности

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности Беллмана, формулирующийся следующим образом: управление на каждом шаге надо выбрать так, чтобы оптимальной была сумма выигрышей на всех оставшихся до конца процесса шагах, включая выигрыш на данном шаге.

Объясняется это правило так: при решении задачи динамического программирования на каждом шаге выбирается управление, которое должно привести к оптимальному выигрышу. Если считать все шаги независимыми друг от друга, то оптимальным шаговым управлением будет то управление, которое приносит максимальный выигрыш именно на данном шаге. Но, например, при покупке новой техники в замен устаревшей на ее приобретение затрачиваются определенные средства. Поэтому прибыль от ее эксплуатации вначале может быть небольшой. Однако в следующие годы новая техника будет приносить большую прибыль. И наоборот, если руководитель примет решение оставить старую технику для получения прибыли в текущем году, то в дальнейшем это приведет к значительным убыткам. Данный пример демонстрирует следующий факт: в многошаговых процессах все шаги зависят друг от друга, и, следовательно, управление на каждом конкретном шаге надо выбирать с учетом его будущих воздействий на этот процесс.

Другой момент, который следует учитывать при выборе управления на данном шаге,—это возможные варианты окончания предыдущего шага. Эти варианты определяют состояние процесса. Например, при определении количества средств, вкладываемых в предприятие в i-м году, необходимо знать, какая прибыль получена в предыдущем (i-1)-м году. Таким образом, при выборе шагового управления необходимо учитывать:

1) возможные исходы предыдущего шага;

2) влияние управления на все оставшиеся до конца процесса шаги.

В задачах динамического программирования первый пункт учитывают, делая на каждом шаге условные предположения о возможных вариантах окончания предыдущего шага и приводя для каждого из вариантов условную оптимизацию. Выполнение второго пункта обеспечивается тем, что в задачах динамического программирования условная оптимизация проводится от конца процесса к началу. Вначале оптимизируется последний m-й шаг, на котором не надо учитывать возможные воздействия выбранного управления xm на все последующие шаги, так как эти шаги просто отсутствуют. Делая предположения об условиях окончания (m-1)-го шага, делая предположения об исходах окончания (m-2)-го шага и определяя условное оптимальное управление на (m-1)-м шаге, приносящее оптимальный выигрыш на двух последних шагах—(m-1)-м и m-м. Так же действуют на всех остальных шагах до первого. На первом шаге, как правило, не надо делать условных предположений, так как состояние системы перед первым шагом обычно известно.

Для этого состояния выбирают оптимальное шаговое управление, обеспечивающее оптимальный выигрыш на первом и всех последующих шагах. Это управление является безусловным оптимальным управлением на первом шаге и, зная его, определяются оптимальное значение выигрыша и безусловные оптимальные управления на всех шагах.

Раздел 4. Марковские случайные процессы

§1. Основные понятия теории марковских процессов

В большинстве случаев не удается построить простую математическую модель, позволяющую в явном (аналитическом) виде найти интересующие нас величины (показатели эффективности) в зависимости от условий операции α и элементов решения x. Однако в некоторых особых случаях такую математическую модель удается построить. Это — когда исследуемая операция представляет собой так называемый Марковский случайный процесс.

Пусть имеется некоторая физическая система S, которая с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое), причем заранее неизвестным, случайным образом. Тогда будем говорить, что в системе S протекает случайный процесс.

Под «физической системой» можно понимать что угодно: техническое устройство, группу таких устройств, предприятие, отрасль промышленности, живой организм, популяцию и т. д. Большинству процессов, протекающих в реальных системах, свойственны, в той или иной мере, черты случайности, неопределенности.

Например: система S — техническое устройство, состоящее из ряда узлов, которые время от времени выходят из строя, заменяются или восстанавливаются. Процесс, протекающий в этой системе, безусловно, случаен.

Случайный процесс, протекающий в системе, называется Марковским, если для любого момента времени t0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t0 u не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Пусть в настоящий момент t0 (см. рисунок 14.1) система находится в определенном состоянии S0.

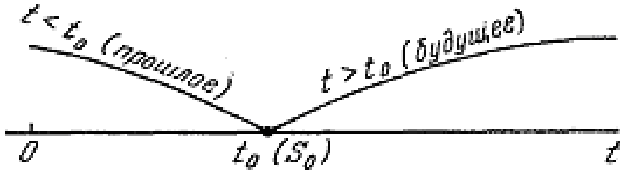


Рисунок 14.1

Мы наблюдаем процесс со стороны и в момент t0 знаем состояние системы S0 и всю предысторию процесса, все, что было при t < t0. Нас интересует будущее (t > t0). Так как в точности его предугадать мы не можем - наш процесс случайный, значит — непредсказуемый. Но какие-то вероятностные характеристики процесса в будущем мы найти можем. Например, вероятность того, что через некоторое время τ система S окажется в состоянии S1 или сохранит состояние S0, и т. п.

Если процесс — Марковский, то предсказывать можно, только учитывая настоящее состояние системы S0 и забыв о его «предыстории» (поведении системы при t < t0). Само состояние S0, разумеется, зависит от прошлого, но как только оно достигнуто, о прошлом можно забыть. Иначе формулируя, в Марковском процессе «будущее зависит от прошлого только через настоящее».

В исследовании операций большое значение имеют так называемые Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Процесс называется процессом с дискретными состояниями, если его возможные состояния S1, S2, S3,., . можно заранее перечислить (перенумеровать), и переход системы из состояния в состояние происходит «скачком», практически мгновенно. Процесс называется процессом с непрерывным временем, если моменты возможных переходов из состояния в состояние не фиксированы заранее, а неопределенны, случайны, если переход может осуществиться, в принципе, в любой момент. Мы будем рассматривать только процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Пример такого процесса: техническое устройство S состоит из двух узлов, каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя (отказать), после чего мгновенно начинается ремонт узла, тоже продолжающийся заранее неизвестное, случайное время. Возможные состояния системы можно перечислить:

So — оба узла исправны,

S1 — первый узел ремонтируется, второй исправен,

S2 — второй узел ремонтируется, первый исправен,

S3 — оба узла ремонтируются.

Переходы системы S из состояния в состояние происходят практически мгновенно, в случайные моменты выхода из строя того или другого узла или окончания ремонта.

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями удобно пользоваться геометрической схемой — так называемым графом состояний.

Состояния системы изображаются прямоугольниками, а возможные переходы из состояния в состояние — стрелками, соединяющими состояния. Мы будем изображать состояния прямоугольниками, в которых записаны обозначения состояний: S1, S2, ..., Sn.

Построим граф состояний для рассмотренного выше примера (см. рисунок 14.2).

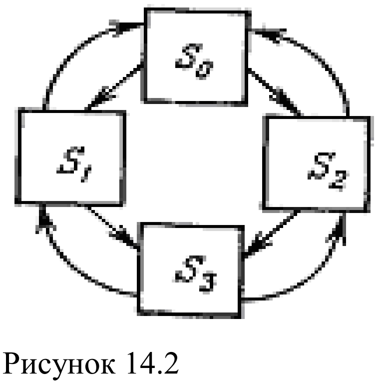


Рисунок 14.2

Стрелка, направленная из S0 в S1, означает переход в момент отказа первого узла; стрелка, направленная обратно, из S1 в S0,— переход в момент окончания ремонта этого узла. Остальные стрелки объясняются аналогично.

Если процесс, протекающий в системе с дискретными состояниями и непрерывным временем, является Марковским, то для его описания можно построить довольно простую математическую модель.

§2. Потоки событий

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Например: поток вызовов на телефонной станции; поток отказов (сбоев) ЭВМ; поток железнодорожных составов, поступающих на сортировочную станцию; поток частиц, попадающих на счетчик Гейгера, и т.д.

Поток событий можно наглядно изобразить рядом точек на оси времени Ot (рисунок 15.1); положение каждой из них случайно, и на рисунке 15.1 изображена только какая-то одна реализация потока.

Рисунок 15.1

Важной характеристикой потока событий является его интенсивность λ — среднее число событий, приходящееся на единицу времени. Интенсивность потока может быть как постоянной (λ = const), так и переменной, зависящей от времени t. Например, поток автомашин, движущихся по улице, днем интенсивнее, чем ночью, в часы пик — интенсивнее, чем в другие часы.

Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через определенные, равные промежутки времени. На практике чаще встречаются потоки не регулярные, со случайными интервалами.

Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики не зависят от времени. В частности, интенсивность λ стационарного потока должна быть постоянной.

На практике часто встречаются потоки событий, которые (по крайней мере, на ограниченном участке времени) могут считаться стационарными. Например, поток вызовов, поступающих на АТС между 13 и 14 часами, практически стационарен; тот же поток в течение суток уже не стационарен.

Поток событий называется потоком без последействия, если для любых двух непересекающихся участков времени τ1 и τ2 (см. рисунок 15.2) число событий, попадающих на один из них, не зависит от того, сколько событий попало на другой.

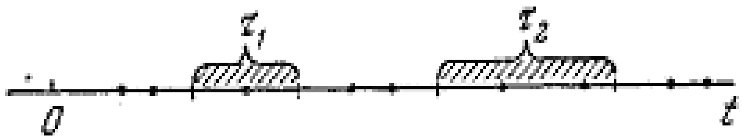


Рисунок 15.2

Это означает, что события, образующие поток, появляются в те или другие моменты времени независимо друг от друга, вызванные каждое своими собственными причинами. Например, поток пассажиров, входящих в метро, практически не имеет последействия. А вот поток покупателей, отходящих от прилавка с купленными товарами, уже имеет последействие (т.к. интервал времени между отдельными покупателями не может быть меньше, чем минимальное время t0 обслуживания каждого из них).

Поток событий называется ординарным, если события в нем появляются поодиночке, а не группами по несколько сразу. Например, поток клиентов, направляющихся в парикмахерскую или к зубному врачу, обычно ординарен, чего нельзя сказать о потоке клиентов, направляющихся в загс для регистрации брака. Поток поездов, подходящих к станции, ординарен, а поток вагонов —

неординарен. Если поток событий ординарен, то вероятностью попадания на малый участок времени Δt двух или более событий можно пренебречь.

Поток событий называется простейшим (или стационарным пуассоновским), если он обладает сразу тремя свойствами: стационарен, ординарен и не имеет последействия. Название «простейший» связано с тем, что процессы, связанные с простейшими потоками, имеют наиболее простое математическое описание.

§3. Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний

Рассматривая Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, представим, что все переходы системы S из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий. Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние,— простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет Марковским.

Если система S находится в каком-то состоянии Si, из которого есть непосредственный переход в другое состояние Sj (стрелка, ведущая из Si, в Sj на графе состояний), то представим что на систему, пока она находится в состоянии Si, действует простейший поток событий, переводящий ее по стрелке Si->Sj. Как только появится первое событие этого потока, происходит «перескок» системы из Si в Sj.

Для наглядности на графе состояний у каждой стрелки проставим интенсивность того потока событий, который переводит систему по данной стрелке. Обозначим λ0 интенсивность потока событий, переводящего систему из состояния Si в Sj. На рисунке 16.1 дан граф состояний с проставленными у стрелок интенсивностями (будем называть такой граф размеченным).

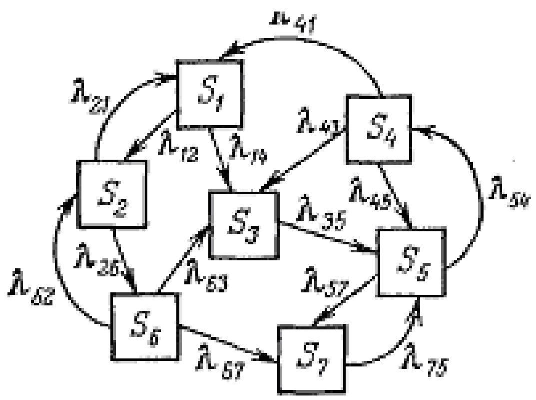


Рисунок 16.1

Построим размеченный граф состояний для технического устройства из двух узлов. Напомним состояния системы:

S0 — оба узла исправны,

S1 — первый узел ремонтируется, второй исправен,

S2 — второй узел ремонтируется, первый исправен,

S3 — оба узла ремонтируются.

Интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, будем вычислять, предполагая, что среднее время ремонта узла не зависит от того, ремонтируется ли один узел или оба сразу.

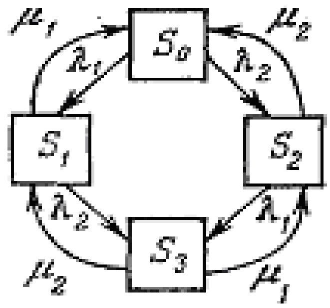


Рисунок 16.2

Найдем все интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние. Пусть система находится в состоянии S0. Поток отказов первого узла переводит ее в состояние S1. Его интенсивность $\lambda 1$ равна единице, деленной на среднее время безотказной работы первого узла. Поток «окончаний ремонтов» первого узла переводит систему обратно из S1 в S0. Его интенсивность $\mu 1$ равна единице, деленной на среднее время ремонта первого узла. Аналогично вычисляются интенсивности потоков событий, переводящих систему по всем стрелкам графа рисунка 16.2.

Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний системы, построим математическую модель данного процесса.

Пусть рассматривается система S, имеющая n возможных состояний S1, S2, ..., Sn. Назовем вероятностью i-го состояния вероятность pi(t) того, что в момент t система будет находиться в состоянии Si. Очевидно, что для любого момента сумма всех вероятностей состояний равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 \qquad (16.1)$$

Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний, можно найти все вероятности состояний pi(t) как функции времени. Для этого составляются и решаются так называемые уравнения Колмогорова — особого вида дифференциальные уравнения, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний.

Пусть система S имеет четыре состояния: S1, S2, S3, S4, размеченный граф которых показан на рисунке 16.3.

Рассмотрим одну из вероятностей состояний, например p1(t). Это—вероятность того, что в момент t система будет в состоянии S1. Придадим t малое приращение Δt и найдем p1 $(t + \Delta t)$ — вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ система будет в состоянии S1.

Это может произойти двумя способами:

1) в момент t система уже была в состоянии S1, а за время Δt не вышла из него;
2) в момент t система была в состоянии S2, а за время Δt перешла из него в S1.

Найдем вероятность первого варианта. Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S1, равна p1(t). Эту вероятность нужно умножить на вероятность того, что, находившись в момент t в состоянии S1, система за время Δt не перейдет из него ни в S2, ни в S3. Суммарный поток событий, выводящий систему из состояния S1, тоже будет простейшим, с интенсивностью $\lambda 12+\lambda 13$. Значит, вероятность того, что за время Δt система выйдет из состояния S1, равна $(\lambda 12 + \lambda 13)\Delta t$; вероятность того, что не выйдет:

$1 - (\lambda 12 + \lambda 13)\Delta t$. Отсюда вероятность первого варианта равна $p1(t)\,[1 - (\lambda 12 + \lambda 13)\Delta t]$.

Найдем вероятность второго варианта. Она равна вероятности того, что в момент t система будет в состоянии S2, а за время Δt перейдет из него в состояние S1, т. е. она равна $p2(t)\lambda 21\Delta t$.

Складывая вероятности обоих вариантов (по правилу сложения вероятностей), получим:

$$p1(t +\Delta t) = p1(t)\,[1 - (\lambda 12 + \lambda 13)\Delta t] + p2(t)\lambda 21\Delta t \,.$$

Раскроем квадратные скобки, перенесем p1(t) в левую часть и разделим обе части на Δt:

$$\frac{p_1(t+\Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = \lambda_{21} p_2(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1(t).$$

Устремим Δt к нулю; слева получим в пределе производную функции p1(t). Таким образом, запишем дифференциальное уравнение для p1(t):

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{21} p_2(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1(t),$$

или, короче, отбрасывая аргумент t у функций p1, p2 :

$$\frac{dp_1}{dt} = \lambda_{21} p_2 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1$$

Рассуждая аналогично для всех остальных состоянии, напишем еще три дифференциальных уравнения. Присоединяя к ним уравнение (16.2), получим систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= \lambda_{21} p_2 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})\, p_1, \\ \frac{dp_2}{dt} &= \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{24} + \lambda_{21})\, p_2, \\ \frac{dp_3}{dt} &= \lambda_{31} p_1 + \lambda_{43} p_4 - \lambda_{32} p_3, \\ \frac{dp_4}{dt} &= \lambda_{24} p_2 - \lambda_{43} p_4. \end{aligned} \tag{16.3}$$

Это — система четырех линейных дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными функциями p1 p2, p3, p4. Одно из них (любое) можно отбросить, пользуясь тем, что p1 + p2 + p3 + p4 = 1, т.е. выразить любую из вероятностей pi через другие, это выражение подставить в (16.3), а соответствующее уравнение с производной dpi/dt отбросить.

Сформулируем общее правило составления уравнений Колмогорова. В левой части каждого из них стоит производная вероятности какого-то (i-го) состояния. В правой части — сумма произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го) состояния.

Пользуясь этим правилом, запишем уравнения Колмогорова для системы S, размеченный граф состояний которой дан на рисунке 16.2:

$$\begin{aligned} \frac{dp0}{dt} &= \mu 1 p1 + \mu 2 p2 - (\lambda 1 + \lambda 2)\, p0 \\ \frac{dp1}{dt} &= \lambda 1 p0 + \mu 2 p3 - (\lambda 2 + \mu 1)\, p1 \\ \frac{dp2}{dt} &= \lambda 2 p0 + \mu 1 p3 - (\lambda 1 + \mu 2)\, p2 \\ \frac{dp3}{dt} &= \lambda 2 p1 + \lambda 1 p2 - (\mu 1 + \mu 2)\, p3 \end{aligned} \tag{16.4}$$

Чтобы решить уравнения Колмогорова и найти вероятности состояний, прежде всего надо задать начальные условия. Если мы точно знаем начальное состояние системы Si, то в начальный момент (при t = 0) p0(0) = 1, а все остальные начальные вероятности равны нулю. Так, например, уравнения (17.4) естественно решать при начальных условиях $p0(0) = 1$, $p1(0) = p2(0) = p3(0) = 0$ (в начальный момент оба узла исправны).

Уравнения Колмогорова дают возможность найти все вероятности состояний как функции времени.

§4. Финальные вероятности состояний

Если при $t \to \infty$ вероятности состояний $p1(t)$, $p2(t)$,... будут стремиться к каким-то пределам и если эти пределы существуют и не зависят от начального состояния системы, то они называются финальными вероятностями состояний. В теории случайных процессов доказывается, что если число n состояний системы конечно и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое, то финальные вероятности существуют.

Предположим, что это условие выполнено и финальные вероятности существуют:

$$\lim_{t \to \infty} pi(t) = pi \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (17.1)$$

Финальные вероятности будем обозначать теми же буквами p1, p2, ..., что и сами вероятности состояний, но понимая под ними уже не переменные величины (функции времени), а постоянные числа. Очевидно, они тоже образуют в сумме единицу:

$$\sum_{i=1}^{n} pi(t) = 1 \qquad (17.2)$$

При $t \to \infty$ в системе S устанавливается предельный стационарный режим, в ходе которого система случайным образом меняет свои состояния, но их вероятности уже не зависят от времени. Финальную вероятность состояния Si можно рассматривать как среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Например, если система S имеет три состояния S1, S2, S3 и их финальные вероятности равны 0,2, 0,3 и 0,5, это значит, что в предельном, стационарном режиме система в среднем две десятых времени проводит в состоянии S1, три десятых—в состоянии S2 и половину времени — в состоянии S3.

Если вероятности p1, p2, ... постоянны, то их производные равны нулю. Значит, чтобы найти финальные вероятности, нужно все левые части в уравнениях Колмогорова положить равными нулю и решить полученную систему уже не дифференциальных, а линейных алгебраических уравнений. Если перенести отрицательный член каждого уравнения из правой части в левую, то получим сразу систему уравнений, где слева стоит финальная вероятность данного состояния pi, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, ведущих из данного состояния, а справа — сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в i-е состояние, на вероятности тех состояний, из которых эти потоки исходят.

Пользуясь этим правилом, напишем линейные алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний системы, граф состояний которой дан на рисунке 16.2:

$$\begin{aligned}
(\lambda 1 + \lambda 2)\, p0 &= \mu 1 p1 + \mu 2 p2 \\
(\lambda 2 + \mu 1)\, p1 &= \lambda 1 p0 + \mu 2 p3 \\
(\lambda 1 + \mu 2)\, p2 &= \lambda 2 p0 + \mu 1 p3 \qquad (17.3) \\
(\mu 1 + \mu 2)\, p3 &= \lambda 2 p1 + \lambda 1 p2
\end{aligned}$$

При решении этой системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными p0, p1, p2, p3, воспользуемся так называемым нормировочным условием:

$$p0 + p1 + p2 + p3 = 1 \qquad (17.4)$$

и с его помощью решить систему. При этом одно (любое) из уравнений можно отбросить (оно вытекает как следствие из остальных).

Зададимся численными значениями интенсивностей $\lambda 1 = 1$, $\lambda 2=2$, $\mu 1 = 2$, $\mu 2 = 3$ и решим систему (17.3). Вместо четвертого уравнения добавим нормировочное условие (17.4). Уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}
3p0 &= 2p1 + 3p2 \\
4p1 &= p0 + 3p3
\end{aligned}$$

$4p_2 = 2p_0 + 3p_3$ (17.5)

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Решая их, получим:

$p_0 = 6/15=0,40$; $p_1 =3/15 =0,20$; $p_2 = 4/15 = 0,27$; $P_3=2/15 =0,13$,

т. е. в предельном, стационарном режиме система S в среднем 40% времени будет проводить в состоянии S0 (оба узла исправны), 20% — в состоянии S1 (первый узел ремонтируется, второй работает), 27% —в состоянии S2 (второй узел ремонтируется, первый работает) и 13% — в состоянии S3 полной негодности (оба узла ремонтируются). Знание этих финальных вероятностей может помочь оценить среднюю эффективность работы системы и загрузку ремонтных органов. Предположим, что система S в состоянии S0 (полностью исправная) приносит в единицу времени доход 8 (условных единиц), в состоянии S1—доход 3, в состоянии S2—доход 5, в состоянии S3 — вообще не приносит дохода. Тогда в предельном, стационарном режиме средний доход в единицу времени будет

$W = 0,40 \cdot 8 + 0,20 \cdot 3 + 0,27 \cdot 5 = 5,15.$

Теперь оценим загрузку рабочих, занятых ремонтом узлов 1 и 2. Узел 1 ремонтируется долю времени, равную $p_1 + p_3 = 0,20 + 0,13 = 0,33$. Узел 2 ремонтируется долю времени $p_2 + p_3 = 0,40$.

Раздел 5. Теория массового обслуживания

§1. Понятие системы массового обслуживания. Классификация систем массового обслуживания

Систему массового обслуживания в общем виде можно представить как совокупность последовательно связанных между собой входящих потоков требований на обслуживание (машин, самолетов, пользователей и т.д.), очередей, каналов обслуживания (станция техобслуживания, аэродром, ЭВМ и т.д.) и выходящих потоков требований после обслуживания.

Системы массового обслуживания по наличию того или иного признака можно классифицировать таким образом:

1. По характеру поступления требований - на системы с регулярным и случайным потоками поступления требований в систему. Случайный поток подразделяется на стационарный и нестационарный:

- если количество поступающих требований в систему в единицу времени (интенсивность потока) постоянно или является заданной функцией времени, то это система с регулярным потоком поступления требований, в противном случае - со случайным;

- если параметры потока требований не зависят от расположения рассматриваемого интервала на оси времени, то имеем стационарный поток требований, в противном случае - нестационарный. Например, если число покупателей, приходящих в магазин, не зависит от времени суток, то поток требований (покупателей) - стационарный.

2. По количеству поступающих требований в один момент времени - на системы с ординарным и неординарным потоками требований. Если вероятность поступления двух или более требований в один момент равна нулю или имеет столь малую величину, что ею можно пренебречь, то имеем систему с ординарным потоком требований. Например, поток требований - самолетов, поступающих на взлетно-посадочную полосу аэродрома (ВПП), можно считать ординарным, так как вероятность поступления двух и более самолетов в канал обслуживания (ВПП) - очень мала и ею можно пренебречь.

3. По связи между требованиями - на системы без последействия от поступивших требований и с последействием. Если вероятность поступления требований в систему в некоторый момент времени не зависит от количества уже поступивших, то есть от предыстории изучаемого процесса, то мы имеем задачу без последействия, в противном случае - с последействием. Примером задачи с последействием может служить поток студентов на сдачу зачета преподавателю.

4. По характеру поведения требования - в системе с отказами, с ограниченным ожиданием и с ожиданием без ограничения:

- если вновь поступившее требование на обслуживание застает все каналы обслуживания уже занятыми и оно покидает систему, то имеем систему с отказами. Требование может покинуть систему и в том случае, когда очередь достигла определенных размеров. Если ракета противника появляется в то время, когда все противоракетные установки заняты обслуживанием других ракет, то она благополучно покидает область обслуживания;

- если поступившее требование застает все каналы обслуживания занятыми и становится в очередь, но находится в ней ограниченное время, после чего, не дождавшись обслуживания, покидает систему, то имеем систему с ограниченным ожиданием. Примером такого «нетерпеливого требования» может быть автосамосвал с раствором: если время ожидания велико, то во избежание затвердения раствора он может быть разгружен в другом месте;

- если поступившее требование, застав все каналы обслуживания занятыми, вынуждено ожидать своей очереди до тех пор, пока оно не будет обслужено, то имеем систему с ожиданием без ограничения. Пример: самолет, который находится на аэродроме до тех пор, пока не освободится взлетная полоса.

5. По способу выбора требований на обслуживание - с приоритетом, по мере поступления, случайно, последний обслуживается первым. Иногда в таком случае говорят о дисциплине обслуживания:

- если система массового обслуживания охватывает несколько категорий требований и по каким-либо соображениям необходимо соблюдать различный подход к их отбору, то имеем систему с приоритетом. Так, при поступлении изделий на стройплощадку в первую очередь, монтируются те, которые необходимы в данный момент;

- если освободившийся канал обслуживает требование, ранее других поступившее в систему, то имеем систему с обслуживанием требований по мере их поступления. Это наиболее распространенный класс систем. Например, покупатель, подошедший первым к продавцу, обслуживается первым. Этот способ выбора требований на обслуживание применяется там, где в силу технических, технологических или организационных условий требования не могут опережать друг друга;

- если требования из очереди поступают в канал обслуживания в случайном порядке, то имеем систему со случайным выбором требований на обслуживание. Пример: выбор слесарем-сантехником одной из нескольких заявок, поступивших от жильцов на устранение некоторых неисправностей. Выбор здесь, как правило, определяется местоположением самого слесаря: он выбирает заявку, наиболее близко расположенную к нему, если никакие другие факторы не предопределяют иной выбор;

- последний обслуживается первым. Этот способ выбора требований используется в тех случаях, когда удобнее или экономнее брать на обслуживание требование, позже всех поступившее в систему. Так, при укладке строительных изделий в штабель удобнее брать из штабеля (очереди) изделие, поступившее последним.

6. По характеру обслуживания требований - на системы с детерминированным и случайным временем обслуживания. Если интервал времени между моментом поступления требования в канал обслуживания и моментом выхода из этого канала постоянен, то имеем систему с детерминированным временем обслуживания, в противном случае - со случайным.

7. По числу каналов обслуживания - на одноканальные и многоканальные системы. Так, при монтаже дома для обслуживания прибывающих на стройку изделий может быть использован один подъемный кран (один канал обслуживания) или несколько (много каналов).

8. По количеству этапов обслуживания - на однофазные и многофазные системы. Если каналы обслуживания расположены последовательно и они неоднородны, так как выполняют различные операции, то имеем многофазную систему. Примером такой системы может быть, например, техническое обслуживание автомобилей (мойка, диагностирование и т.д.).

9. По однородности требований, поступающих на обслуживание, - на системы с однородными и неоднородными потоками требований. Так, если под погрузку прибывают фургоны одной грузоподъемности, то такие требования называются однородными, если разной - неоднородными.

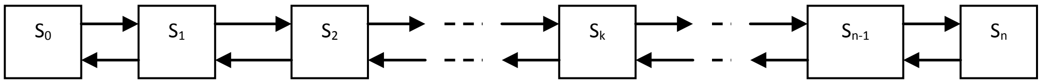
10. По ограниченности потока требований - на замкнутые и разомкнутые системы. Если поток требований ограничен и требования, покинувшие систему, через некоторое время в нее возвращаются, то имеем замкнутую систему, в противном случае - разомкнутую. Примером замкнутой может служить ремонтная бригада и обслуживаемое ею оборудование. Если изучены или заданы входящие потоки требований, механизм (число каналов обслуживания, продолжительность обслуживания и т.д.) и дисциплина обслуживания, то это дает основание для построения математической модели системы.

Задачи массового обслуживания условно делят на задачи анализа и задачи синтеза - оптимизации систем массового обслуживания. Первые предполагают определение основных параметров функционирования системы массового обслуживания при неизменных, наперед заданных исходных характеристиках: структура системы, дисциплина обслуживания, потоки требований и законы распределения времени на их обслуживание. Вторые направлены на поиск оптимальных параметров систем массового обслуживания.

§2. Схема гибели и размножения

Имея размеченный граф состояний, можно написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний, а также написать и решить алгебраические уравнения для финальных вероятностей. Для некоторых случаев удается последние уравнения решить заранее, в буквенном виде. В частности, это удается сделать, если граф состояний системы представляет собой так называемую «схему гибели и размножения».

Граф состояний для схемы гибели и размножения имеет вид, показанный на рисунке 19.1.



λ_{01} λ_{12} λ_{23} $\lambda_{k-1,k}$ $\lambda_{k,k-1}$ $\lambda_{n-1,n}$
λ_{10} λ_{21} λ_{32} $\lambda_{k,k-1}$ $\lambda_{k+1,k}$ $\lambda_{n,n-1}$

Рисунок 19.1

Особенность этого графа в том, что все состояния системы можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний (S_1, S_2, ..., S_{n-1}) связано прямой и обратной стрелкой с каждым из соседних состояний — правым и левым, а крайние состояния (S_0, S_n) — только с одним соседним состоянием. Термин «схема гибели и размножения» ведет начало от биологических задач, где подобной схемой описывается изменение численности популяции.

Схема гибели и размножения очень часто встречается в разных задачах практики, в частности — в теории массового обслуживания. Найдем для нее финальные вероятности состояний.

Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа,— простейшие.

Пользуясь графом рисунка 19.1, составим и решим алгебраические уравнения для финальных вероятностей состояний.

Для первого состояния S_0 имеем:

$$\lambda_{01}p_0=\lambda_{10}p_1. \qquad (19.1)$$

Для второго состояния S_1:

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}P_2.$$

В силу (19.1) последнее равенство приводится к виду

$$\lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}P_2;$$

далее, совершенно аналогично

$$\lambda_{23}P_2 = \lambda_{32}p_3$$

и вообще

$$\lambda_{k-1,k}p_{k-1}=\lambda_{k,k-1}p_k,$$

где k принимает все значения от 0 до n. Итак, финальные вероятности p_0, p_1,..., p_n удовлетворяют уравнениям

$\lambda 01p0=\lambda 10p1$
$\lambda 12p1 = \lambda 21P2$
…………………. (19.2)
$\lambda k\text{-}1,kpk\text{-}1=\lambda k,k\text{-}1pk$
………………….
$\lambda n\text{-}1,npn\text{-}1=\lambda n,n\text{-}1pn$

кроме того, надо учесть нормировочное условие

p0 +p1+p2+ ... +pn =1. (19.3)

Решим эту систему уравнений. Из первого уравнения (19.2) выразим p1 через p0:

$p1 = (\lambda 01/\lambda 10)p0$. (19.4)

Из второго, с учетом (19.4), получим:

$p2=(\lambda 12/\lambda 21)p1=(\lambda 12\lambda 01)/(\lambda 21\lambda 10)p0$; (19.5)

из третьего, с учетом (19.5),

$p3=(\lambda 23\lambda 12\lambda 01)/(\lambda 32\lambda 21\lambda 10)p0$ (19.6)

и вообще, для любого k (от 1 до n):

$pk=(\lambda k\text{-}1,k... \lambda 12\lambda 01)/(\lambda k,k\text{-}1... \lambda 21\lambda 10)p0$ (19.7)

Обратим внимание на формулу (19.7). В числителе стоит произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо (с начала и до данного состояния Sk,), а в знаменателе — произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево (с начала и до Sk).

Таким образом, все вероятности состояний p0, p1, ..., pn выражены через одну из них (p0). Подставим эти выражения в нормировочное условие (19.3). Получим, вынося за скобку p0:

$$p_0 \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1\,n} \ldots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}\lambda_{10}}\right) = 1,$$

отсюда получим выражение для p0:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n} \ldots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1} \qquad (19.8)$$

Все остальные вероятности выражены через p0 (см. формулы (19.4) - (19.7)). Коэффициенты при p0 в каждой из них представляют собой последовательные члены ряда, стоящего после единицы в формуле (19.8). Значит, вычисляя p0, мы уже нашли все эти коэффициенты.

Полученные формулы применяются при решении простейших задач теории массового обслуживания.

§3. Простейшие системы массового обслуживания и их параметры

Рассмотрим одноканальную замкнутую систему массового обслуживания (СМО) с неограниченным временем ожидания требований для него и с простейшим потоком. Этот поток характеризуется следующими особенностями: первая - поступление требований в систему на обслуживание происходит по одному, то есть вероятность прибытия двух и более требований в один момент времени очень мала, и поэтому ею можно пренебречь (поток требований ординарный). Вторая - вероятность поступления последующих требований в любой момент времени не зависит от возможности их прибытия в предыдущие моменты - поток требований без последействия. Третья особенность - поток требований стационарный.

Функционирование любой системы массового обслуживания можно представить через все возможные состояния ее и интенсивность перехода из одного состояния в другое. Основными параметрами функционирования СМО являются вероятности ее состояния, то есть возможности наличия n требований (покупателей, рабочих, заданий, машин, неполадок) в системе - Pn. Так, вероятность P0 характеризует состояние, когда в системе нет требований и канал обслуживания простаивает.

Важным параметром функционирования СМО является среднее число требований, находящихся в системе Nsyst , то есть в очереди на обслуживание, а также средняя длина очереди Noch. Исходными параметрами, характеризующими систему массового обслуживания, являются: число каналов обслуживания - N (касс, компьютеров, кранов, ремонтных бригад,...); число требований (покупателей, заданий, машин, неполадок,...) - m; интенсивность поступления одного требования на обслуживание - λ, то есть число поступлений требований в единицу времени; интенсивность обслуживания требований – μ.

Интенсивность поступления требования на обслуживание определяется как величина, обратная времени возвращения требования, - tвоз:

λ = 1/ tвоз.

Интенсивность обслуживания требований определяется как величина, обратная времени обслуживания одного требования, - tобс:

μ = 1/ tобс.

Постановка задачи

Пусть задан комплект машин «экскаватор - автосамосвалы». Экскаватор погружает за один рабочий цикл $g_э = 1$ т массы грунта. Грузоподъемность автосамосвала $g_a = 7$ т. Число машин, обслуживающих экскаватор, $m = 5$. Время рабочего цикла экскаватора составляет $t_{р.ц.} = 18$ с, а время обращения автосамосвала $t_{обр.} = 10$ мин. Определить фактическую производительность комплекта машин; среднее число машин, находящихся в системе; среднее число машин, находящихся в очереди; вероятность наличия n машин в системе.

Построение математической модели.

Состояние системы массового обслуживания будем связывать с числом требований, находящихся в системе:

- в системе нет ни одного требования - вероятность состояния P_0;
- в системе находится одно требование - вероятность состояния P_1;
- в системе находится n требований - вероятность состояния P_n.

Представим все возможные состояния СМО в виде размеченного графа состояний (рисунок 20.1). Каждый прямоугольник графа, количественно оцениваемый вероятностью состояний P_n, определяет одно из всех возможных состояний. Стрелки указывают, в какое состояние система может перейти и с какой интенсивностью.

Первый прямоугольник с вероятностью P_0 определяет состояние СМО, при котором канал обслуживания простаивает из-за отсутствия требований в ней. Из этого положения система может перейти только в состояние P_1. Тогда в ней появится одно требование, так как входной поток их ординарный. С интенсивностью μ система может перейти также из состояния P_1 в состояние P_0; когда в системе находилось одно требование, оно было обслужено раньше, чем появилось новое и т.д.

Рассмотрим установившийся режим работы системы массового обслуживания, когда основные вероятностные характеристики СМО постоянны во времени, например, в течение часа. Тогда интенсивности входных и выходных потоков для каждого состояния будут сбалансированы. Эти балансы выглядят так:

$$P_0 m \lambda = P_1 \mu$$
$$P_1(\mu + (m-1)\lambda) = P_0 m \lambda + P_2 \mu$$
$$P_2(\mu + (m-2)\lambda) = P_1 (m-1)\lambda + P_3 \mu$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n(\mu + (m-n)\lambda) = P_{n-1}(m-(n-1))\lambda + P_{n+1}\mu \qquad (20.1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_m \mu = P_{m-1} \lambda$$

Обозначим величину λ/μ через ψ и назовем ее коэффициентом загрузки.

Из первого уравнения можно найти значение P_1:

$$P_1 = P_0 m \lambda / \mu = P_0 m \psi.$$

Из второго уравнения найдем значение P_2:

$$P_2 = P_1 + P_1(m-1)\lambda/\mu - P_0 m \lambda/\mu$$

Но первый член - $P_1 = P_0 m \lambda / \mu$, следовательно, первый и третий сокращаются:

$$P_2 = P_1(m-1)\lambda/\mu = P_0 m(m-1)\psi^2.$$

Из третьего уравнения найдем значение P_3:

$$P_3 = P_2 + P_2(m-2)\lambda/\mu - P_1(m-1)\lambda/\mu$$

Но первый член - $P2 = P1(m – 1) \lambda / \mu$, следовательно, первый и третий сокращаются:

$P3 = P2(m – 2) \lambda / \mu = P0m(m – 1)(m – 2)\psi 3$

…………………………………………………

m

$Pn = Pn\text{-}1(m – (n – 1)) \lambda / \mu = P0m(m – 1)…(m – (n – 1))\psi n = P0 \sum (m – (n – 1))! \cdot \psi n$

n=0

m

Используя очевидное равенство $\sum Pn = 1$, получим:

n=0

m

$1 = P0 \sum (m – (n – 1))! \cdot \psi n$ (20.2)

n=0

Зная вероятность простоя канала обслуживания P0, можно определить его фактическую производительность:

$Pf = (1 – P0) \cdot \mu \cdot G$ (20.3)

где G, например, количество груза, помещенного за одно обслуживание в машину.

Для установившегося режима работы системы средняя интенсивность поступления требований во входном потоке равна аналогичной характеристике выхода требований из канала обслуживания:

$(m – Nsyst) \cdot \lambda = (1 – P0) \cdot \mu$ (20.4) где Nsyst - среднее число обслуживаемых требований, находящихся в системе. Из данного равенства можно легко найти среднее число требований (покупателей, рабочих, заданий, машин, неполадок,...), находящихся в системе Nsyst :

$$Nsyst = m - (1 - P0) / \psi \tag{20.5}$$

Среднее же число требований (машин), находящихся в очереди, будет вычислено так:

$$Noch = Nsyst - (1 - P0) = m - (1 - P0)\,(1/ \psi + 1) \tag{20.6}$$

Решение задачи при установившемся режиме работы.
Время обслуживания одного грузовика составит:

$$t_{погр} = \frac{g_а}{g_э}\, t_{р.ц.} \tag{20.7}$$

$$t_{погр} = \frac{18 \times 7}{60 \times 1} = 2{,}1 \text{ мин.}$$

Интенсивность погрузки автосамосвала экскаватором составит:

$$\mu = \frac{1}{t_{погр}} \tag{20.8}$$

$$\mu = \frac{60}{2,1} = 29 \text{ погрузок в час.}$$

Интенсивность же поступления автосамосвала на погрузку составит:

$$\lambda = \frac{1}{t_{обр}} \qquad (20.9)$$

$$\lambda = \frac{60}{10} = 6 \text{ обращений в час.}$$

Коэффициент $\psi = \lambda / \mu$ будет равен $\psi = 0,207$.

Вероятность простоя экскаватора в этом случае составит:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{m} (m - (n - 1))! \cdot \psi^n} \qquad (20.10)$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{5} (5 - (n - 1))! \cdot \psi^n} = 0,271$$

Таким образом, фактическая производительность данного комплекта машин будет на 27,1% ниже технической.

Вероятности наличия n машин в системе:

$P1 = P0\ m\ \psi = 0,281$
$P2 = P1\ (m - 1)\ \psi = 0,233$
$P3 = P2\ (m - 2)\ \psi = 0,144$
$P4 = P3\ (m - 3)\ \psi = 0,06$
$P5 = P4\ (m - 4)\ \psi = 0,012$

Фактическая производительность комплекта машин определяется по формуле 20.3 :

Pf = (1 – 0,271) · 29 · 7 = 147,947 т/час.

Среднее число машин, находящихся в системе определяется по формуле 20.6 :

Nsyst = 5 – (1 – 0,271) / 0,207 = 1,477

Среднее число машин, находящихся в очереди определяется по формуле 20.7 :

Noch = 5 – (1 – 0,271) (1/0,207 + 1) = 0,749

Раздел 6. Имитационное моделирование

§1. Метод имитационного моделирования. Типы имитационных моделей

Методы имитационного моделирования позволяют собрать необходимую информацию о поведении системы путем создания ее компьютеризованной модели. Эта информация используется затем для проектирования системы. Имитационное моделирование не решает оптимизационных задач, а скорее представляет собой технику оценки значений функциональных характеристик моделируемой системы.

Имитационное моделирование применяется в различных областях науки, техники, экономикой. С помощью имитационного моделирования решаются:

1. Задачи в различных областях естественных наук (математика, физика, химия):

- вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми, или, в более общем случае, вычисление кратных интегралов;
- вычисление констант (например π, равной 3,14159..,);
- обращение матриц;
- изучение диффузионных процессов.

2. Практические задачи:

- производственно-технологические задачи, возникающие в процессе создания систем массового обслуживания, систем связи, в сфере управления запасами, а также при анализе химических процессов;
- экономические и коммерческие задачи, включая оценки поведения потребителя, определение цен, экономическое прогнозирование деятельности фирм;
- социальные и социально-психометрические задачи, например проблемы динамики народонаселения, влияния экологии на здоровье, эпидемиологических исследований, а также прогнозирование группового поведения;
- задачи биомедицинских систем, например проблема баланса жидкости в организме человека, размножения клеток крови, деятельности мозга;
- задачи анализа той или иной военной стратегии и тактики.

Вычисление результатов имитации базируется на случайной выборке. Это означает, что любой результат, полученный путем имитационного моделирования, подвержен экспериментальным ошибкам и, следовательно, как в любом статистическом эксперименте, должен основываться на результатах соответствующих статистических проверок.

Использование современных имитационных моделей основано, в основном, на идее метода Монте-Карло (выборка случайных чисел для получения искомых оценок). Отличие состоит в том, что имитационная модель обычно связана с изучением реально существующей системы, поведение которой является функцией времени. Существует два типа имитационных моделей.

1) Непрерывные модели используются для систем, поведение которых изменяется непрерывно во времени. Типичным примером непрерывной имитационной модели является изучение динамики народонаселения мира. Непрерывные имитационные модели обычно представляются в виде разностно-дифференциальных уравнений, которые описывают взаимодействие между различными элементами системы.

2) Дискретные модели применяются в системах, поведение которых изменяется лишь в заданные моменты времени. Типичным примером такой модели является очередь, когда задача моделирования состоит в оценивании операционных характеристик обслуживающей системы, таких, например, как среднее, время ожидания или средняя длина очереди. Такие характеристики системы массового обслуживания изменяют свои значения либо в момент появления клиента, либо при завершении обслуживания.

Те моменты времени, в которые в системе происходят изменения, определяют события модели (например, приход или уход клиента). То, что эти события происходят в дискретные моменты, указывает, что процесс протекает в дискретном времени, откуда и появилось название дискретное моделирование.

Несмотря на то что как непрерывные, так и дискретные имитационные модели являются важным инструментом решения практических задач, в исследовании операций всегда используется дискретный тип имитационных моделей. Это объясняется, в частности, тем, что дискретная имитационная модель очень тесно связана с моделями массового обслуживания.

Все имитационные модели с дискретными событиями описывают прямо или косвенно ситуации с очередью, в которую клиенты прибывают, при необходимости ожидают в ней, потом обслуживаются перед тем, как оставить систему. В общем случае любая модель с дискретными событиями состоит из сети взаимосвязанных очередей.

Двумя главными событиями в любой дискретной имитационной модели являются прибытие и уход клиентов. Это единственные показатели, по которым необходимо исследовать систему. В другие моменты времени никаких изменений, влияющих на статистические данные системы, не происходит.

§2. Языки имитационного моделирования

Реализация имитационных моделей влечет за собой два различных типа вычислений:

1) манипуляции регистрацией, которые имеют дело с хронологическим накоплением и обработкой событий модели;

2) вычисления, связанные с генерированием случайных чисел и сбором статистических данных, относящихся к модели.

Вычисления первого типа основываются на различных логических методах обработки списков, а вычисления второго типа обычно очень громоздки и занимают много времени. Эти вычисления делают компьютер важным инструментом в реализации имитационных моделей, что, в свою очередь, стимулирует создание специализированных языков программирования, которые позволяют выполнять эти вычисления более удобным и эффективным способом.

Доступные языки дискретного имитационного моделирования делятся на две большие категории:

1) Языки, ориентированные на планирование событий.

2) Языки, ориентированные на обработку процессов (процедур).

При использовании языков, ориентированных на планирование событий, пользователю необходимо указать действия, связанные с каждым событием, происходящим в системе. Основная роль программы в этом случае сводится к автоматизации процесса получения случайных значений, имеющих соответствующее распределение, хронологическому накоплению, обработке событий и сбору данных, относящихся к модели.

Процедурно-ориентированные языки используют блоки (или узлы), которые можно соединять для формирования сети, которая описывает движение транзакций или объектов (т.е. клиентов) в системе.

Процедурно-ориентированные языки управляются теми же действиями, что и языки, ориентированные на планирование событий. Отличие состоит в том, что эти действия автоматизированы для освобождения пользователя от утомительных вычислительных и логических деталей.

Наиболее известными языками программирования, ориентированными на планирование событий, являются SIMSCR1PT, SLAM и SIMAN. Все эти языки позволяют пользователю создавать модели (или их отдельные части) на языках высокого уровня, таких как FORTRAN и С. Это необходимо для того, чтобы дать возможность пользователю программировать сложные логические операции, которые невозможно или трудно осуществить обычными средствами этих языков.

Первым процедурно-ориентированным языком был GPSS. Этот язык, первая версия которого появилась в начале 60-х годов, совершенствовался на протяжении нескольких лет, чтобы удовлетворить новым требованиям, связанным с моделированием сложных систем. Чтобы эффективно использовать этот язык, пользователю необходимо настроить примерно восемьдесят различных блоков. До сих пор язык GPSS все еще имеет некоторые трудно объяснимые особенности моделирования.

Другой процедурно-ориентированный язык программирования, именуемый SEMNET II, разработан для непосредственного моделирования сложных ситуаций. SIMNET II использует три типа узлов: источник, который генерирует заказы, очередь, где заказы могут ожидать, и средство обслуживания, где выполняется обслуживание. В этом языке имеется еще четвертый дополнительный тип узла, который рассматривается как средство обслуживания неограниченной емкости, что призвано усилить моделирующие возможности языка.

Раздел 7. Прогнозирование

§1. Основная идея прогнозирования. Методы прогнозирования

Принимая решения, мы определяем планы на будущее. Следовательно, используемые при этом данные должны соответствовать будущим событиям. Например, в теории управления запасами мы обосновываем наши решения посредством спроса на определенные виды продукции в течение определенного планового периода. Аналогично в финансовом планировании необходимо предсказать структуру денежного потока в будущем на основе структуры текущих денежных потоков.

Рассмотрим две методики прогнозирования изменений интересующих нас переменных как функций времени.

Прогнозирование с использованием скользящего среднего. При использовании этой методики основное предположение состоит в том, что временной ряд является устойчивым в. том смысле, что его члены являются реализациями следующего случайного процесса:

$$y_t = b + \varepsilon_t$$

где y_t - действительное (или наблюденное) значение случайной величины у в момент времени t;

b— неизвестный постоянный параметр, который оценивается на основе представленной информации;

ε_t - случайный компонент (или шум) в момент времени t.

Предполагается, что случайная ошибка ε_t имеет нулевое математическое ожидание и постоянную дисперсию.

Метод с использованием скользящего среднего предполагает, что последние n наблюдений являются равнозначно важными для оценки параметра b. Другими словами, если в текущий момент времени t последними n наблюдениями есть y_{t-n+1}, y_{t-n+2}, …, y_t, тогда оцениваемое значение для момента t + 1 вычисляется по формуле

$$y_{t+1}^* = \frac{y_{t-n+1} + y_{t-n+2} + \ldots + y_t}{n}$$

где y_t^* - расчетное значение (оценка) случайной величины у в момент времени t.

Не существует четкого правила для выбора числа n - базы метода, использующего скользящее среднее. Если есть весомые основания полагать, что наблюдения в течение достаточно длительного времени удовлетворяют модели $y_t = b + \varepsilon_t$, то рекомендуется выбирать большие значения n. Если же наблюдаемые значения удовлетворяют приведенной модели в течение коротких периодов времени, может быть приемлемым и малое значение n. На практике величина я обычно принимается в пределах от 2 до 10.

Прогнозирование путем экспоненциального сглаживания. Прогнозирование путем экспоненциального сглаживания (метод экспоненциального сглаживания) предполагает, что вероятностный процесс определяется моделью $y_t = b + \varepsilon_t$.

Метод экспоненциального сглаживания разработан для того, чтобы устранить недостаток метода скользящего среднего, который состоит в том, что все данные, используемые при вычисления среднего, имеют одинаковый вес. В частности, метод экспоненциального сглаживания приписывает больший весовой коэффициент самому последнему наблюдению.

Определим величину α ($0 < \alpha < 1$) как константу сглаживания, и пусть известны значения временного ряда для прошедших t моментов времени y_1, y_2, …, y_t. Тогда оценка y_{t+1}^* для момента времени t + 1 вычисляется по формуле

$$y_{t+1}^* = \alpha y_t + \alpha(1 - \alpha)y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \ldots$$

Коэффициенты при y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, … постепенно уменьшаются, тем самым эта процедура приписывает больший вес последним (по времени) данным.

Формулу для вычисления y_{t+1}^* можно привести к следующему (более простому) виду:

$$y_{t+1}^* = \alpha y_t + (1 - \alpha)\{\alpha y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)y_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{t-3} \ldots\} = = \alpha y_t + (1 - \alpha)y^*_t$$

Таким образом, значение y_{t+1}^* можно вычислить на основании значения y^*_t . Вычисления в соответствии с этим уравнением начинаются с того, что пропускается оценка y^*_1 для $t = 1$ и в качестве оценки для $t = 2$ принимается величина для $t = 1$, т.е. $y^*_2 = y_1$.

Выбор константы сглаживания α является решающим моментом при вычислении значения прогнозируемой величины. Большее значение α приписывает больший вес последним наблюдениям. На практике значение α берут в пределах от 0.01 до 0.30.

Раздел 8. Теория принятия решений

§1. Элементы теории принятия решений

В теории принятия решений используются "разумные" процедуры выбора наилучшей из нескольких возможных альтернатив. Доброкачественность выбранного решения зависит от качества данных, используемых при описании ситуации, в которой принимается решение. С этой точки зрения процесс принятия решений может принадлежать к одному из трех возможных условий.

1. Принятие решений в условиях определенности, когда данные известны точно.
2. Принятие решений в условиях риска, когда данные можно описать с помощью вероятностных распределений.
3. Принятие решений в условиях неопределенности, когда данным нельзя приписать относительные веса (весовые коэффициенты), которые представляли бы степень их значимости в процессе принятия решений.

То есть, в условиях определенности данные надежно определены, в условиях неопределенности они не определены, так как имеющиеся данные трудно или невозможно .классифицировать по. степени значимости их для принятия решения и что для этих данных, рассматриваемых как реализации случайных величин или процессов, неизвестна или не может быть определена их функция распределения или другие статистические характеристики. Принятие решений в условиях риска, следовательно, представляет "промежуточный" случай.

Принятие решений в условиях определенности

Модели линейного программирования являются примером принятия решений в условиях определенности. Эти модели применимы лишь в тех случаях, когда альтернативные решения можно связать между собой точными линейными функциями.

Рассмотрим иной подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как метод анализа иерархий.

Метод анализа иерархий

Рассмотрим пример, демонстрирующий способ, с помощью которого оцениваются различные альтернативные решения.

Мартин Ганс — выпускник-отличник средней школы, который получил полную стипендию от трех университетов: А, В и С. В целях выбора университета Мартин сформулировал два основных критерия: местонахождение университета и его академическая репутация. Будучи отличным учеником, он оценивает академическую репутацию университета в пять раз выше, чем его местонахождение. Это приводит к тому, что репутации университета приписывается вес примерно 83%, а его местонахождению — 17%. Далее Мартин использует системный анализ (сущность его излагается ниже) .для оценки трех университетов с точки зрения их местонахождения и репутации. Проведенный анализ дает следующие оценки.

	Университет		
	А	В	С
Местонахождение	12,9%	27,7%	59,4%
Репутация	54,5%	27,3%	18,2%

Структура задачи принятия решений приведена на рисунке 24.1. Задача имеет единственный иерархический уровень с двумя критериями (местонахождение и репутация) и три альтернативных решения (университеты А, В и С).

Оценка трех университетов основана на вычислении комбинированного весового коэффициента для каждого из них.

Университет А: 0.17 х 0.129 + 0.83 х 0.545 = 0.4743.
Университет В: 0.17 х 0.277 + 0.83 х 0.273 = 0.2737.
Университет С: 0.17 х 0.594 + 0.83 Х 0.182 = 0.2520.

На основе этих вычислений университет А получает наивысший комбинированный вес и, следовательно, является наиболее оптимальным выбором Мартина.

Общая структура метода анализа иерархий может включать несколько иерархических уровней со своими критериями.

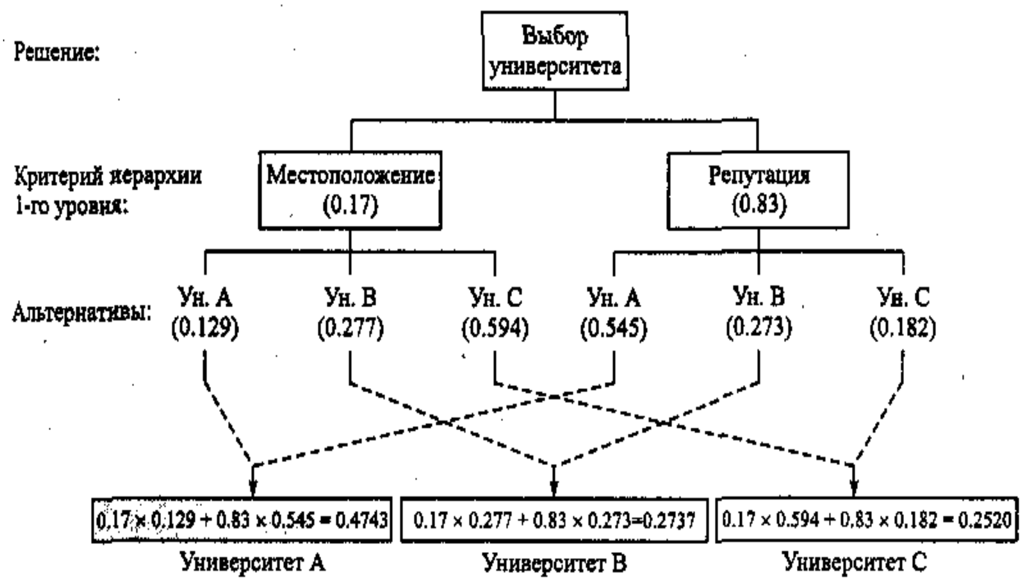


Рисунок 24.1 - Структура задачи принятия решений

Принятие решений в условиях риска

Если решение принимается в условиях риска, то стоимости альтернативных решении обычно описываются вероятностными распределениями. По этой причине принимаемое решение основывается на использовании критерия ожидаемого значения, в соответствии с которым альтернативные решения сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат. Такой подход имеет свои недостатки, которые не позволяют использовать его в некоторых ситуациях.

Критерий ожидаемого значения сводится либо к максимизации ожидаемой (средней) прибыли, либо к минимизации ожидаемых затрат. В данном случае предполагается, что прибыль (затраты), связанная с каждым альтернативным решением, является случайной величиной.

В приведенном ниже примере рассматривается простая ситуация, связанная с принятием решения при наличии конечного числа альтернатив и точных значений матрицы доходов.

Предположим, что вы хотите вложить на фондовой бирже 10 000 долларов в акции одной из двух компаний: А или В. Акции компании А являются рискованными, но могут принести 50% прибыли от суммы инвестиции на протяжении следующего года. Если условия фондовой биржи будут неблагоприятны, сумма инвестиции может обесцениться на 20%. Компания В обеспечивает безопасность инвестиций с 15% прибыли в условиях повышения котировок на бирже и только 5% — в условиях понижения котировок. Все аналитические публикации, с которыми можно познакомиться (а они всегда есть в изобилии в конце года), с вероятностью 60% прогнозируют повышение котировок и с вероятностью 40% — понижение котировок. В какую компанию следует вложить деньги?

Информация, связанная с принятием решения, суммирована в следующей таблице 24.1.

Таблица 24.1

Альтернативное решение	Прибыль от инвестиций за один год	
	При повышении котировок ($)	При понижении котировок ($)
Акции компании А	5000	-2000
Акции компании В	1500	500

Вероятность события	0,6	0,4

Эта задача может быть также представлена в виде дерева решения, показанного на рисунке 24.2. На этом рисунке используется два типа вершин: квадратик представляет "решающую" вершину, а кружок— "случайную". Таким образом, из вершины 1 ("решающая") выходят две ветви, представляющие альтернативы, связанные с покупкой акций компании А или В. Далее две ветви, выходящие из "случайных" вершин 2 и 3, соответствуют случаям повышения и понижения котировок на бирже с вероятностями их появления и соответствующими платежами.

Исходя из схемы рисунка 24.2, получаем ожидаемую прибыль за год для каждой из двух альтернатив.

Для акций компании А: $5000 x 0.6 + (-2000) x 0.4 = $2 200.

Для акций компании В: $1500 x 0.6 + $500 x 0.4 = $1 100.

Вашим решением, основанным на этих вычислениях, является покупка акций компании А.

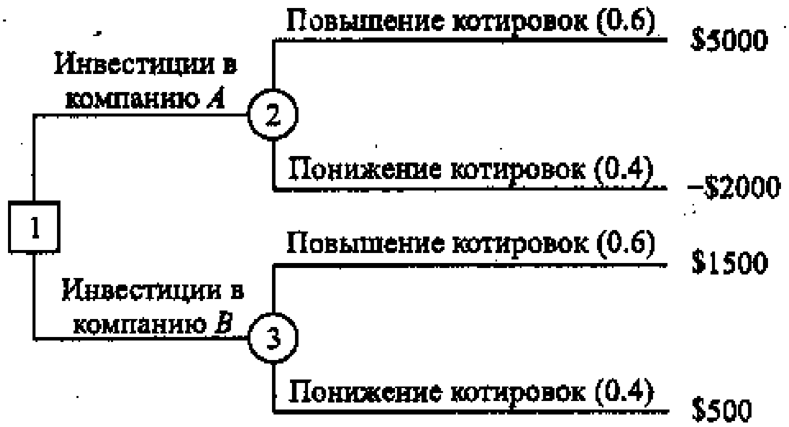


Рисунок 24.2 – Дерево решения

В теории принятия решений повышение и понижение котировок на бирже именуются состояниями природы, возможные реализации которых являются случайными событиями (в данном случае с вероятностями 0.6 и 0.4).

Раздел 9. Теория игр

§1. Основные понятия теории игр. Простейшие методы решения задач теории игр

В теории игр рассматриваются ситуации, связанные с принятием решений, в которых два разумных противника имеют конфликтующие цели. К числу типичных примеров относится рекламирование конкурирующих товаров и планирование военных стратегий противоборствующих армий, Эти ситуации принятия решений отличаются от рассмотренных ранее.

В игровом конфликте участвуют два противника, именуемые игроками, каждый из которых имеет некоторое множество (конечное или бесконечное) возможных выборов, которые называются стратегиями. С каждой парой стратегий связан платеж, который один из игроков выплачивает другому. Такие игры известны как игры двух лиц с нулевой суммой, так как выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. В такой игре достаточно задать результаты в виде платежей для одного из игроков. При обозначении игроков через А и В с числом стратегий m и n соответственно, игру обычно представляют в виде матрицы платежей игроку А:

	B1 B2 ….. Bn
A1 A2 … Am	a11 a12 ………. a1n a21 a22 ………. a2n …………………………. am1 am2 ………. amn

Такое представление матричной игры означает, что если игрок А использует стратегию i, а игрок В — стратегию j, то платеж игроку А составляет aij и, следовательно, игроку В — -aij.

Оптимальное решение игры двух лиц с нулевой суммой

Поскольку игры берут свое начало в конфликте интересов, оптимальным решением игры является одна или несколько таких стратегий для каждого из игроков, при этом любое отклонение от данных стратегий не улучшает плату тому или другому игроку. Эти решения могут быть в виде единственной чистой стратегии или нескольких стратегий, которые являются смешанными в соответствии с заданными вероятностями.

Например, две компании А и В продают два вида лекарств против гриппа. Компания А рекламирует продукцию на радио (А1), телевидении (А2) и в газетах (А3). Компания В, в дополнение к использованию радио (В1), телевидения (В2) и газет (В3), рассылает также по почте брошюры (В4). В зависимости от умения и интенсивности проведения рекламной кампании, каждая из компаний может привлечь на свою сторону часть клиентов конкурирующей компании. Приведенная ниже матрица характеризует процент клиентов, привлеченных или потерянных компанией А

Минимумы строк

	B1 B2 B3 B4	
A1	8 -2 9 -3	-3
A2	6 5 6 8	**5** Максимин
A3	-2 4 -9 5	-9

Максимумы столбцов 8 5 9 8

Минимакс

Решение игры основано на обеспечении наилучшего результата из наихудших для каждого игрока. Если компания А выбирает стратегию А1 то, независимо от того, что предпринимает компания В, наихудшим результатом является потеря компанией А 3% рынка в пользу компании В. Это определяется минимумом элементов первой строки матрицы платежей. Аналогично при выборе стратегии А2 наихудшим исходом для компании А является увеличение рынка на 5% за счет компании В. Наконец, наихудшим исходом при выборе стратегии Аз является потеря компанией А 9% рынка в пользу компании В. Эти результаты содержатся в столбце "Минимумы строк". Чтобы достичь наилучшего результата из наихудших, компания А выбирает стратегию А2, так как она соответствует наибольшему элементу столбца "Минимумы строк".

Рассмотрим теперь стратегии компании В. Так как элементы матрицы являются платежами компании А, критерий наилучшего результата из наихудших для компании В соответствует выбору минимаксного значения. В результате приходим к выводу, что выбором компании В является стратегия В2.

Оптимальным решением игры является выбор стратегий А2 и В2, т.е. обеим компаниям следует проводить рекламу на телевидении. При этом выигрыш будет в пользу компании А, так как ее рынок увеличится на 5%. В этом случае говорят, что цена игры равна 5% и что компании А и В используют стратегии, соответствующие седловой точке.

Решение, соответствующее седловой точке, гарантирует, что ни одной компании нет смысла пытаться выбрать другую стратегию. Действительно, если компания В переходит к другой стратегии (В1, В3 или В4), то компания А может сохранить свой выбор стратегии А2, что приведет к большей потере рынка компанией В (6% или 8%). По тем же причинам компании А нет резона использовать другую стратегию, ибо если она применит, например, стратегию А3, то компания В может использовать свою стратегию В3 и увеличить свой рынок на 9%. Аналогичные выводы имеют место, если компания А будет использовать стратегию А1.

Оптимальное решение игры, соответствующее седловой точке, не обязательно должно характеризоваться чистыми стратегиями. Вместо этого оптимальное решение может требовать смешивания случайным образом двух или более стратегий.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Место дисциплины в ООП

Дисциплина «Математический анализ» в подготовке бакалавров направления 09.03.02 является одной и основных, на которых строится естественнонаучная и профессиональная подготовка будущих специалистов, способных выполнять все виды профессиональной деятельности, предусмотренные ФГОС ВО направления 09.03.02, формирование математической составляющей общекультурных и профессиональных компетенций. Профессиональный уровень подготовки бакалавров в значительной мере определяется освоением современного математического аппарата, владением инструментарием для исследования и решения профессиональных задач. Поэтому изучение дисциплины «Математический анализ» занимает значительное место в ООП и служит фундаментальной базой образования бакалавров.

Методические рекомендации студентам по изучению дисциплины

В рабочей программе дисциплины помещен список рекомендуемой литературы (раздел 6), тематический план и содержание дисциплины (раздел 3.1), оформленный в виде таблицы. В таблице перечислены разделы курса, ориентировочное время на их усвоение и приведены ссылки на основные литературные источники. При изучении каждого раздела рекомендуется использовать материалы УМКД и указанные литературные источники.

Для проверки результатов усвоения нужно использовать Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации и самоконтроля по итогам освоения дисциплины (раздел 5 рабочей программы).

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Для целенаправленного и эффективного формирования запланированных компетенций при изучении дисциплины предусмотрены следующие образовательные технологии:

1. Информационно-коммуникативные технологии, позволяющие овладевать и свободно оперировать большим запасом знаний путем самостоятельного изучения профессиональной литературы, применения новых информационных технологий, включая использование технических и электронных средств получения информации.
2. Проблемно-ориентированные технологии, направленные на формирование и развитие проблемного мышления, мыслительной активности, способности видеть и формулировать проблемы, выбирать средства для их решения.
3. Практико-ориентированные технологии, направленные на формирование системы профессиональных практических умений и навыков, позволяющих качественно осуществлять профессиональную деятельность.
4. Личностно-ориентированные технологии, обеспечивающие в ходе учебного процесса учет различных способностей обучаемых, создание необходимых условий для развития их индивидуальных способностей, развитие активности личности учебном процессе.
5. Здоровьесберегающие технологии, позволяющие равномерно во время занятия распределять различные виды заданий, определять время подачи сложного учебного материала, выделять время на проведение самостоятельных работ.

Для реализации указанных технологий используются следующие сочетания методов и форм организации обучения:

- Лекционная система обучения;
- Информационно-коммуникационные технологии
- Проектные методы обучения
- Исследовательские методы в обучении

- Проблемное обучение

Программа дисциплины предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (компьютерные симуляции, разбор конкретных ситуаций, работа над проектами) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся. Эффективность применения интерактивных форм обучения обеспечивается реализацией следующих условий:

- создание диалогического пространства в организации учебного процесса;
- использование принципов социально-психологического обучения в учебной и научной деятельности;
- формирование психологической готовности преподавателей к использованию интерактивных форм обучения, направленных на развитие внутренней активности студентов.

Методы	Формы организации обучения	
Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
IT- методы	+	
Дискуссия	+	+
Работа в команде	+	+
Методы проблемного обучения	+	+
Индивидуальное обучение	+	
Исследовательские методы	+	

IT – методы.

Основой поддержки процесса образования являются современные информационные технологии, которые имеют следующие преимущества: наглядность, возможность использования комбинированных форм представления информации - графическое изображение, анимация, обработка и хранение больших объемов информации, доступ к мировым информационным ресурсам.

IT – технологии способствуют развитию творческих способностей учащихся, обучению новым профессиональным навыкам и умениям, развитию логического мышления, усилению роли самостоятельной работы обучаемого.

При изучении учебной дисциплины применяются следующие направления использования информационных технологий:

- компьютерные программы и обучающие системы;

- тестовые системы, предназначенные для диагностирования, оценивания и проверки знаний, способностей и умений;

- лабораторные комплексы, в основе которых лежат моделирующие программы, предоставляющие в распоряжение обучаемого возможности использования - математической модели для исследования определенной реальности;

- базы данных и базы знаний по различным областям, обеспечивающие доступ к накопленным знаниям (Библиотека ГОСТов и нормативных документов. http://libgost.ru, Федеральный портал. Каталог образовательных Интернет-ресурсов. http://www.edu.ru/index.php, Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Образование в области техники и технологий http://window.edu.ru/);

- прикладные и инструментальные программные средства, обеспечивающие выполнение конкретных учебных операций (обработку текстов, составление таблиц, редактирование графической информации и др.).

- системы на базе мультимедиа-технологии, построенные с применением видеотехники, накопителей на CD-ROM.

Положительным при использовании информационных технологий в образовании является повышение качества обучения за счет:

- большей адаптации обучаемого к учебному материалу с учетом собственных возможностей и способностей;
- возможности выбора более подходящего для обучаемого метода усвоения предмета;
- регулирования интенсивности обучения на различных этапах учебного процесса;

самоконтроля;

- доступа к ранее недосягаемым образовательным ресурсам российского и мирового уровня;
- поддержки активных методов обучения;
- образной наглядной формы представления изучаемого материала;
- модульного принципа построения, позволяющего тиражировать отдельные составные части информационной технологии;
- развития самостоятельного обучения.

Дискуссия

При проведении лабораторных и практических занятий по дисциплине используется такая образовательная технология, как дискуссия, то есть коллективное обсуждение какой-либо проблемы или круга вопросов с целью нахождения правильного ответа. Такой способ организации совместной деятельности позволяет интенсифицировать эффективность учебного процесса за счет активного включения обучаемых в коллективный поиск истины, а также сопоставления информации, идей, мнений, предложений.

Тема дискуссии объявляется преподавателем заранее. Студенты изучают соответствующую литературу, получают необходимую информацию, в том числе с использованием IT – методов. В ходе дискуссии каждый студент имеет право высказать свою точку зрения. Дискуссия формирует умение рассуждать, доказывать, формулировать проблему и т.п.

В ходе дискуссии необходимо договариваться об общем понимании терминов, а также общем понимании темы или проблемы. При этом дискуссии могут преследовать разные цели - обсуждение проблемы, достижение согласия, прояснение позиций, углубление понимания вопроса, нахождение различных вариантов решения и видение этой вариативности, развитие умений занимать и отстаивать свою точку зрения, улучшение навыков активного слушания. Необходимо, чтобы у участников было достаточно материалов для обсуждения проблемы.

Обстановка в процессе проведения дискуссии должна быть непринужденной, студенты раскованными, мнение каждого считается ценным и обсуждается. Можно высказывать любые предположения, в том числе парадоксальные и нереальные.

Способы вовлечения в дискуссию:

1. Положительный климат в группе (уважительное отношение друг к другу).
2. Демократические нормы обсуждения, запрещение оскорбительных выпадов.
3. Подготовка студентов к обсуждению – изучение информации по обсуждаемой теме, время на формирование вопросов и точек зрения («репетиция размышлений»).
4. Обучение навыкам приглашения к обсуждению и предотвращению доминирования при обсуждении.
5. Необходимо предоставлять достаточное количество времени.

7. Обсуждать дискуссию после ее окончания.

Работа в команде

Работа в команде предполагает как самостоятельность мышления включенных в нее студентов, так и вовлеченность студентов в общую работу для решения поставленных перед командой задач.

На кафедре практикуется такая форма работы в команде, как проведение зачетных занятий по циклам лабораторного практикума, теоретического курса и других контрольных мероприятий в игровой форме. При этом появляется мощный социальный стимул – зависимость общей успеваемости команды студентов от уровня знаний каждого ее члена.

Игровое занятие целесообразно проводить:

1) в конце цикла лабораторных работ для допуска к экзамену; в этом случае тематика вопросов из общего списка должна соответствовать перечню лабораторных работ, предусмотренных учебным планом;

2) в качестве недифференцированной формы рейтинг-контроля;

3) как зачет по всему курсу или каким-то его разделам.

Методы проблемного обучения

Под проблемным обучением понимается система научно обоснованных методов и средств, применяемая в процессе развивающего обучения, которая предполагает создание под руководством преподавателя проблемных ситуаций и активную самостоятельную деятельность учащихся по их разрешению с целью, в первую очередь, интеллектуального и творческого развития учащихся, а также овладения ими знаниями, навыками, умениями и способами познания. Проблемное обучение обеспечивает возможности творческого участия обучаемых в процессе освоения новых знаний, формирование познавательных интересов и творческого мышления, высокую степень органичного усвоения знаний и мотивации учащихся.

Проблемное обучение можно отнести к личностно-ориентированным концепциям, так как оно применяется для того, чтобы у студентов развивалось творческое мышление, интеллект.

Основой для этого является моделирование реального творческого процесса за счет создания проблемной ситуации и управления поиском решения проблемы. При этом осознание, принятие и разрешение этих проблемных ситуаций происходит при оптимальной самостоятельности учащихся, но под общим направляющим руководством педагога в ходе совместного взаимодействия.

Проблемное обучение используется при выполнении рефератов, индивидуальных заданий, тематика и содержание которых отвечает всем принципам проблемного обучения.

При таком обучении существенно усиливается роль самостоятельного образования, инициативность. Самостоятельный поиск решения проблемной ситуации развивает чувство ответственности, повышает самомотивацию, волю учащихся. Кроме того, в процессе проблемного обучения предполагается, что учащиеся будут самостоятельно выбирать и обрабатывать самые разные источники информации, в том числе и те, с которыми они будут работать в последующем, и обращаться к этим источникам им приходится чаще, чем тем, кто обучается по традиционной программе. Групповая организация работы учащихся в процессе проблемного обучения приводит к укреплению межличностных отношений, развивает взаимодействие в учебном микросоциуме: решение проблемных задач производится, как правило, в группах небольшого и среднего размера. В случае применения группового метода проблемного обучения учащиеся получают навыки коллегиального решения рабочих проблем.

Чрезвычайно важной функцией проблемного обучения можно назвать и повышение мотивации учащихся. Как говорил еще Г.Галилей, «вы не в состоянии научить человека чему-либо. Вы можете лишь помочь ему обнаружить это внутри себя». Без мотивации учебная деятельность, как и любая другая, практически невозможна. В традиционной системе преподавания мотивация осуществляется известным методом кнута и пряника или же основные усилия педагога по мотивации учащихся направлены на объяснение важности обучения для будущей деятельности учащихся, что также не всегда эффективно. В ненаучной сфере такой подход получил название «знание – силой». Без обратной положительной реакции учащихся учебный процесс или теряет свою эффективность, или приводит к значительному утомлению учащихся, их эмоциональным перегрузкам. В этом отношении проблемное обучение имеет более выигрышное положение, так как его характеризует творческая, а не репродуктивная деятельность учащихся, студенты получают больше возможности самореализоваться в процессе обучения, постоянная постановка и решение проблемных задач является более приемлемой для поддержания неослабевающего интереса и активности учащихся.

Индивидуальное обучение

Индивидуальное обучение — это целостный процесс, обеспечивающий поступательное развитие творческого потенциала личности и всестороннее обогащение ее духовного мира. Он состоит из последовательно возвышающихся ступеней специально организованной учебы, дающих человеку благоприятные для него изменения социального статуса.

В центре внимания идеи индивидуального обучения находится студент, его личность, желания и способности, разностороннему развитию которых уделяется основное внимание.

Роль преподавателя сводится к доходчивому преподнесению познавательной информации, содержание которой ориентируется на опережение развития общества, профессиональной карьеры, личных навыков и качеств студентов, и других сфер социальной практики. Помимо самих знаний, умений, навыков в содержание индивидуального обучения входит сам процесс, опыт их приобретения и практического применения, пути и способы самостоятельного добывания, поиска и открытия, самообразования — "личностный опыт" как компонент содержания образования.

В результате реализации индивидуального обучения преподаватель стремится получить развивающуюся личность, подготовленную к универсальной деятельности, имеющую сформированные познавательные запросы и духовные потребности, способную самостоятельно планировать и реализовать свои цели.

Исследовательские методы

Научно-исследовательская работа - это вид самостоятельной аналитической деятельности обучающихся в области систематизированного изучения какого-либо вопроса или актуальной проблемы, выходящих за рамки учебного процесса. Такая работа способствует созданию общенаучного фундамента и выработке исследовательских навыков. Основная идея исследовательского метода заключается в использовании научного подхода к решению той или иной учебной задачи.

Использование исследовательского метода подразумевает следующие этапы организации учебной деятельности: определение общей темы исследования, предмета и объекта исследования; выявление и формулирование общей проблемы; формулировку гипотез; определение методов сбора и обработки данных в подтверждение выдвинутых гипотез; сбор данных; обсуждение полученных данных; проверку гипотез; формулировку понятий, обобщений, выводов; применение заключений, выводов.

Участвуя в научно-исследовательской работе, студенты усваивают готовые формы социальной жизни, приобретают собственный социальный опыт, занимают активную жизненную позицию, которая помогает добиться позитивной самореализации. Полученные в процессе творческой деятельности навыки и умения позволят учащимся чувствовать себя приобщенными к культуре и науке, способными активно проявлять себя на рынке труда, свободно распоряжаться образовательным капиталом. Достоинством исследовательского метода организации учебной деятельности является привитие учащимся навыка сотрудничества. Участники исследовательской деятельности не замыкаются на личностных интересах, учатся видеть проблемы и интересы своих партнеров и понимать, что результаты их исследований будут использованы для анализа полученных данных и формулирования выводов.

Проведение научного исследования с обучающимися имеет следующие цели:

• приобщить их к процессу выработки новых знаний;

• освоить один из нестандартных видов познавательной деятельности;

• научить пользоваться нормативной, учебной, монографической литературой, практическими материалами, статистическими данными, информационной системой Интернет;

• выработать умение работать с основными компьютерными программами;

• предоставить возможность выступить публично, провести полемику, донести до слушателей свою точку зрения, обосновать ее, склонить аудиторию к разделению своих идей.

Исследовательская деятельность под руководством педагога позволяет обучающимся:

• овладеть существенными научными понятиями, представлениями;

• самостоятельно определить проблемные ситуации, найти пути для их разрешения;

• точно описать факты, явления с применением общепризнанной технологии;

• приобрести навык подбора фактов по их существенным признакам;

• сгруппировать факты, признаки в соответствии с общенаучными правилами;

• проанализировать факты и явления, вычленить из них общее и единое, случайное и закономерное;

• выстроить доказательство и давать опровержение.

При написании исследовательской работы у молодых людей развиваются умения:

• анализировать, систематизировать (анализ - это способ познания объекта посредством изучения его частей и свойств);

• сравнивать (сравнение - это способ познания посредством установления сходства и различия);

• обобщать и классифицировать (обобщение - это способ познания посредством определения общих существенных признаков); • определять понятия (понятие - это слово или словосочетание, обозначающее отдельный объект или совокупность объектов и их существенные признаки);

• доказывать и опровергать (доказательство - это рассуждение, устанавливающее истинность какого-либо утверждения путем приведения ранее доказанных утверждений. Опровержение - это рассуждение, направленное на установление ложности выдвинутого утверждения).

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

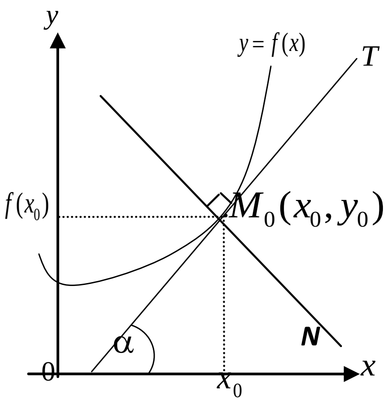
$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left. y'_x \right|_{x_0}, \quad y'(x_0)$$ и другие.

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (3)$$

Механический смысл производной. Если точка движется по закону $S=s(t)$, где S — путь, t — время, то $S'(t)$ представляет скорость движения точки в момент времени t, т. е. $S'(t) = V(t)$.

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметричес-кими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$c' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \lvert u\rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \lvert u\rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$	**14**	$(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \quad (u > 0)$	**15**	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Задание 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$; *б*) $s = (e^t - 2\ln t)\sin t$; *в*) $u = \mathrm{ctg}^3 \dfrac{v}{3}$; *г*) $z = \dfrac{\mathrm{arctg} 2t}{1+4t^2}$.

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$

$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t'=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$

$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v'=1; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t□=1, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2-3} = 1;$

2) $y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x-2)$, или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2)$, или $x + 2y - 4 = 0$ — уравнение нормали.

Задание 3. Найти производную y'_x, если функция задана парамет-рически:
$$\begin{cases} x = \ln(5-2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$$

Используем правило VII $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \frac{(5-2t)'}{5-2t} = \frac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \frac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \frac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x + \cos 2x$; *б*) $u = 3 + e^{-x}$; *в*) $s = \ln 3t$.

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx$, т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) $dy = (x + \cos 2x)' dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2\sin 2x)dx.$

б) $du = (3 + e^{-x})' dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

в) $ds = (\ln 3t)' dt = \dfrac{(3t)'}{3t} dt = \dfrac{3}{3t} dt = \dfrac{1}{t} dt.$

Задание 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x.$

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Задание 6. Точка движется прямолинейно по закону $s = (3t-1)^2 + 4.$ Вычислить скорость и ускорение в момент времени t_0=2.

Скорость $V(t) = s'(t) = [(3t-1)^2 + 4]' = 2(3t-1)3 = 6(3t-1).$

$V(2) = 6(3 \cdot 2 - 1) = 6 \cdot 5 = 30$ (ед. скорости).

Ускорение $a(t) = V'(t) = s''(t).$

$a(t) = (6(3t-1))' = 18.$

т. е. ускорение постоянно в любой момент времени, следовательно $a(2)$ = 18 ед. ускорения.

Краткие сведения из теории пределов функции

Число *A* называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от □, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Функция □(x) называется *бесконечно малой* (б.м.ф.) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \left(\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0 \right).$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.ф.) при $x \to x_0$, ($x \to \infty$), если для любого *M*>0 найдётся число $\delta > 0$, зависящее от *M*, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство $|f(x)| > M$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \right).$

Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой, и обратно, если функция $f(x)$ бесконечно большая функция при $x \to x_0$, то $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой функцией.

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то чтобы сравнить их, нужно вычислить предел их отношения. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k.$ Тогда:

— при $k = 0$ $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$;

— при $0 < k < \infty$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости;

— при $k = \infty$ $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$.

Если $k = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*: $\alpha(x) \sim \beta(x).$

Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую бесконечно малую функцию заменить на эквивалентную.

Примеры эквивалентных бесконечно малых функций при

$$\alpha(x) \to 0: \ \alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x);$$

$$\sim \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim e^{\alpha(x)} - 1 \sim a^{\alpha(x)} - 1 \sim \ln a \sim \ln(1 + \alpha(x)).$$

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$\lim\limits_{x\to\infty}(1 + 1/x)^x = e$ или $\lim\limits_{y\to 0}(1 + y)^{1/y} = e.$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c = \text{const}, \quad c \neq 0, \quad c \neq \infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$\dfrac{0}{c} \to 0; \quad \dfrac{c}{0} \to \infty; \ \dfrac{\infty}{c} \to \infty; \ c\cdot\infty \to \infty; c\cdot 0 \to 0; \ a^{\infty} \to 0,$ если $0 < a < 1; a^{\infty} \to \infty,$ если $a>1.$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \left(\frac{0}{0}\right);\ (0\cdot\infty);\ (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^{0});\ (0^{0}).$$

Устранить неопределенность можно с помощью алгебраических преобразований или используя правило Лопиталя.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6};\ \ б)\ \lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14};\ \ в)\ \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\mathrm{tg}5x}.$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty,\ \text{т. к. } \frac{2}{x^2}\to 0,\ \frac{3}{x^3}\to 0.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

б) $$\lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to-7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to-7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

в) $$\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\mathrm{tg}5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4+0}}{\mathrm{tg}(5\cdot 0)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(2-\sqrt{4+x})'}{(\mathrm{tg}5x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(4+x)^{-1/2}}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 5x}{10\sqrt{4+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2(5\cdot 0)}{10\sqrt{4+0}}=\frac{-1}{20}.$$

Замечание. Если, применив правило Лопиталя, снова получили неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то снова применяем правило до тех пор, пока неопределённость не будет раскрыта.

Задание 8. Построить график функции $y=x^3+3x^2+1,$ используя общую схему исследования функции. Определить абсолютный максимум и абсолютный минимум функции на отрезке [–1, 2].

Краткие теоретические сведения и образец решения примера сведены в таблицу 1.

Общая схема исследования и построения графика функции $y=f(x)$

п/п	Краткие теоретические сведения	Пример
1	**<u>Область определения функции (о.о.ф.)</u>**. *Областью определенияD(f) функции* $y=f(x)$ называется множество всех $x\in X$ таких, что выражение $f(x)$ имеет смысл, т. е. взяв любое $x\in X$ и подставив в $f(x)$ можно найти соответствующее значение функции $f(x)$	$y=x^3+3x^2+1.$ $y=x^3+3x^2+1$ определена для любого x, т. е. о.о.ф. $D(y)=\mathrm{R},\ x\in\mathrm{R}$ или $D(f)=(-\infty;+\infty).$
2	**<u>Область непрерывности функции.</u>** Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x\to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$ Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.	Так как функция $f(x)=x^3+3x^2+1$ определена на всей числовой оси, то она и непрерывна для любого $x\in(-\infty;+\infty)$. Точек разрыва нет.
3	Исследовать функцию на чётность, нечётность. Функция $y=f(x)$ называется *чётной*, если $f(-x)=f(x)$, её график симметричен относительно оси OY. Функция $y=f(x)$ называется *нечётной*, если $f(-x)=-f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. Остальные функции называются *функциями общего вида*.	$f(x)=x^3+3x^2+1$ $f(-x)=(-x)^3+3x^2+1\neq f(x)$ $-f(x)=-x^3-3x^2-1\neq f(-x)$ $f(x)=x^3+3x^2+1$— общего вида

4	<u>**Определить (если возможно) точки пересечения**</u> графика функции с осями координат. Для этого решить системы: Пересечение с осью OY $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$; пересечение с осью OX $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ x = 0 \end{cases}$ $A(0,1)$ $\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 1 = 0.$ решение затруднено.
5	<u>**Определить асимптоты графика функции**</u>. Асимптотой кривой $y = f(x)$ называется прямая l, такое, что расстояние точки $(x, f(x))$ от этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки по кривой от начала координат. Различают вертикальные и наклонные асимптоты. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если x_0 есть точка бесконечного разрыва функции, т. е. если хотя бы один из односторонних пределов функции $\lim\limits_{\substack{x \to x_0+0 \\ x_0-0}} f(x) = \pm\infty.$ Прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$, если $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - x]$, причем оба предела существуют и конечны.	Т. к. функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ не имеет точек разрыва, то вертикальных асимптот у графика функции нет. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}[x^2 + 3x + 1/x] =$ $= (\infty + \infty + 0) = \infty.$ Наклонных асиптот нет.
6	<u>**Определить интервалы монотонности и точки локального экстремума функции**</u>. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на $(a,\ b)$ ($f(x)$□), если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на $(a,\ b)$ ($f(x)$□), если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) < f(x_1)$. Функция называется монотонной на $(a,\ b)$, если $f(x)$ только □ или только □ на (a, b). Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$, то $f(x)$□ на (a, b). Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) < 0$, то $f(x)$□ на (a, b).	*а*) Определим критические точки: $f'(x) = 3x^2 + 6x$ $f'(x) = 0.\ 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$ $3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ \ x_2 = -2$ *б*) о.о.ф. найденными критическими точками разбиваем на интервалы и определяем знак $y'(x)$ внутри каждого

Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума (max), [минимума (min)] функции $f(x)$, если существует некоторый интервал (α, β), содержащий точку x_0 такой, что для всех $x \in (\alpha, \beta)$ $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$ $(x \in (\alpha, \beta)$ $x \neq x_0)$.

Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума функции.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 точка локального экстремума непрерывной функции $f(x)$, то её первая производная $f'(x)$ в точке x_0 или равна нулю, или не существует.

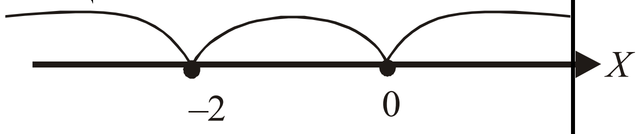
Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками*. **Первое достаточное условие экстремума**: если при переходе через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ изменился

с «+» на «–», то в точке x_0 локальный максимум;

с «–» на «+», то в точке x_0 локальный минимум;

если знак $f'(x)$ не изменился, то в точке x_0 экстремума нет.

интервала. Результаты оформим в таблице.



x	$(-\infty, -2)$	–2	(–2; 0)	0	$(0, +\infty)$
$y'(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	[illegible]	[illegible] max	[illegible]	[illegible] min	[illegible]

$y_{\max} = y(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 1 = 5;$

$y_{\min} = y(0) = 1.$

$y'(-3) = 3\cdot(-3)(-3+2) = 9;$

$y'(-1) = 3\cdot(-1)(-1+2) = -3;$

$y'(1) = 3\cdot1(1+2) = 9 > 0.$

7

Определить интервалы выпуклости функции, точки перегиба

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* $(\cap)$ [*вниз* $\cup$] на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}; \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right]$$

Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются *точками перегиба*.

Если $f''(x) > 0$ всюду на (a, b), то функция $f(x)$ выпукла вниз $(\cup)$ на (a, b).

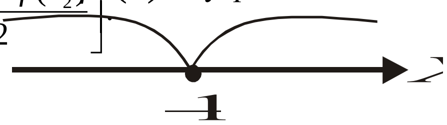
Если $f''(x) < 0$ всюду на (a, b), то функция $f(x)$ выпукла вверх $(\cap)$ на (a, b).

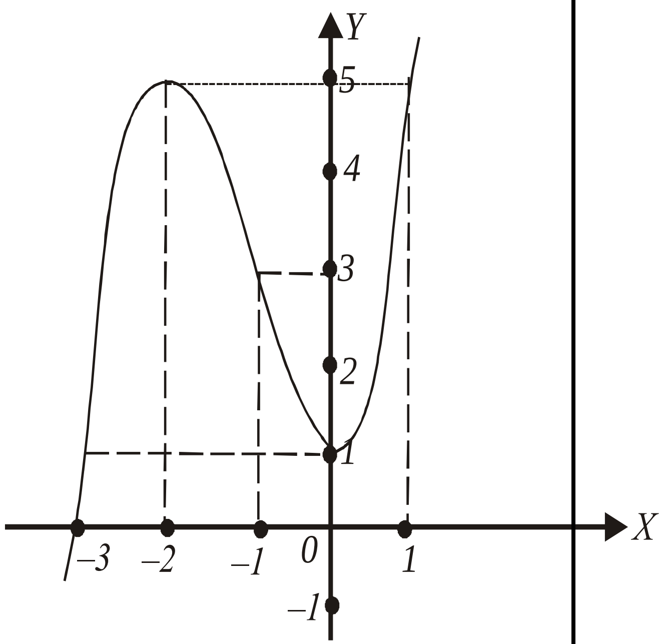
а) Определим точки, подозрительные на перегиб:

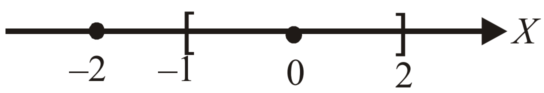
$y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6;$

$y'' = 0.$ $6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1.$

б) О.о.ф. найденными точками разбиваем на интервалы, определяем знак $f''(x)$ внутри каждого интервала.



<table>
<tr>
<td></td>
<td><u>Необходимое условие перегиба</u>: если x_0 — абсцисса точки перегиба непрерывной функции $f(x)$, то $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.
<u>Достаточное условие точки перегиба</u>: пусть $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда если при переходе через x_0 знак второй производной $f''(x)$ изменился, то $(x_0, f(x_0))$ точка перегиба графика функции (при этом $f'(x_0)$ существует).</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty,-1)$</td><td>-1</td><td>$(-1,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$y''(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$y(x)$</td><td>$\cap$</td><td>$\cup\cap$</td><td>$\cup$</td></tr>
</table>
$y_{\text{ïåð}}=y(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+1=3;$
$y''(-2)=6(-2)+6=-6<0; y''(0)=6>0.$
</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td><u>Построить график</u>. Для построения графика можно взять несколько дополнительных точек (–3,1), (1, 5).</td>
<td rowspan="2">


</td>
</tr>
<tr>
<td>9</td>
<td>Абсолютным (или глобальным) экстремумом функции называется наибольшее (абсолютный максимум) или наименьшее (абсолютный минимум) значения функции в области.
Если функция непрерывна на отрезке [a, b], то она всегда имеет на этом отрезке абсолютный максимум и абсолютный минимум.
Абсолютный экстремум может быть или в точках локального экстремума □[a, b] или в концевых точках отрезка.
Если дифференцируемая функция на интервале (a, b) имеет единственную точку локального экстремума, то эта точка будет и точкой абсолютного экстремума функции на (a, b).
<u>Пример</u>. $y=x^3+3x^2+1$ на [–1; 2]
$y'=3x^2+6x=3x(x+2)=0;\ x_1=0, x_2=-2.$
$x_1=0\in[-1;2],\ x_2=-2\notin[-1;2]$
$y(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+1=3;$ Следовательно:
$y(0)=1$ — абсолютный минимум;
$y(0)=1;$
$y(2)=21$ — абсолютный максимум
$y(2)=2^3+3\cdot 2^2+1=21;$
функции на [–1; 2].</td>
</tr>
</table>

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Теорема (о первообразной для данной функции). Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C,$ где C — const.

Доказательство. $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т.е., $F'(x)=f(x)$. $\Phi(x)$ — другая первообразная для $f(x)$, т.е., $\Phi'(x)=f(x)$. Согласно следствию 3 из теоремы Лагранжа, если производные функций равны друг другу, то разность этих функций равна постоянной C: $\Phi(x)-F(x)=C \quad \Rightarrow \quad \Phi(x)=F(x)+C$.

Следствие. Если $F(x)$ — любая первообразная для функции $f(x)$, то всю совокупность первообразных для этой функции определяет выражение $F(x)+C,$ где C — const.

Определение. *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C,$ где $F'(x)=f(x), C$ — const. При этом x называется переменной интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию. Результат интегрирования можно проверить дифференцированием.

Определение. График функции $F(x)$, являющейся первообразной для $f(x)$, называется интегральной кривой.

Геометрический смысл неопределённого интеграла состоит в том, что он представляет собой совокупность всех интегральных кривых. График совокупности можно получить из графика одной интегральной кривой, если его перемещать параллельно самому себе вдоль оси OY.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x);$

Доказательство: $\left(\int f(x)dx\right)'=\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x);$

2. $d\int f(x)dx=f(x)dx;$

Доказательство: $d\int f(x)dx=\left(\int f(x)dx\right)'dx=f(x)dx;$

3. $\int f'(x)dx=f(x)+C;$

4. $\int d\left(f(x)\right)=f(x)+C;$

5. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;

6. $\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Свойство 6 справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Объединяя свойства 5 и 6, получаем свойство линейности неопределённого интеграла.

7. $\int \left(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) \right) dx = k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx;$

8. Теорема (об инвариантности формул интегрирования). Если $\int f(x)dx = F(x) + C,$ то $\int f(u)du = F(u) + C,$ где $u = u(x).$

Доказательство: Так как дифференциал первого порядка обладает свойством инвариантности, то $d\left(F(u)\right) = F'(u)du,$ где $u = u(x) \quad \Rightarrow \quad F(u) -$ первообразная для $f(x)$, а значит $\int f(u)dг = F(u) + C.$

Поскольку операции интегрирования и дифференцирования обратны друг другу, то таблица основных интегралов легко получается из таблицы производных. Приведём таблицу основных интегралов для функции $u = u(x)$. При этом вместо буквы u при интегрировании может быть использована любая буква, например x, t, z и т. д. Кроме формул, получающихся непосредственно из таблицы производных, в таблицу интегралов включено несколько часто встречающихся интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^\alpha du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

6. $\int e^u du = e^u + C;$

7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \text{tg} u + C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg} u + C;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\text{arctg}\dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\text{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\text{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \text{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \text{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

Пример. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы:

$$a)\int \left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5} \right) dx; \qquad á)\int \left(\frac{5}{11x^2+2} + 3\cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x} \right) dx.$$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем свойство 7 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{array}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int 5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int 5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{array}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В НЕОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема (о замене переменной в неопределённом интеграле)**.** Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной в неопределённом интеграле:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример. Проинтегрировать подходящей заменой переменной (подведение под знак дифференциала).

$$а)\ \int\cos 4x dx;\ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ в)\int x(2-x^2)^5dx;\ г)\ \int\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Решение:

$$а)\ \int\cos 4x dx=\left|\begin{array}{c} t=4x \\ dt=(4x)'=4dx \\ dx=\dfrac{dt}{4}\end{array}\right|=\int\cos t\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\cos t dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\sin 4x+C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx=\left|\begin{array}{c} t=9x+1 \\ dt=(9x+1)'=9dx \\ dx=\dfrac{dt}{9}\end{array}\right|=\int e^t\frac{dt}{9}=\frac{1}{9}\int e^t dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 6}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{9}e^t+C=\frac{1}{9}e^{9x+1}+C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5dx=\left|\begin{array}{c} t=2-x^2 \\ dt=(2-x^2)'=-2xdx \\ xdx=\dfrac{dt}{-2}\end{array}\right|=\int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int t^5dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}+C=-\frac{1}{12}(2-x^2)^6+C.$$

$$г)\ \int\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx=\left|\begin{array}{l} t=x+1,\quad x=t-1 \\ dt=(x+1)'dx=dx\end{array}\right|=\int\frac{3(t-1)-1}{\sqrt{t}}dt=\int\frac{3t-4}{\sqrt{t}}dt=3\int\sqrt{t}dt-4\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{формулы 3 и 3а таб-}\\ \text{лицы интегралов}\end{array}\right\}=2t^{\frac{3}{2}}-8\sqrt{t}+C=2\sqrt{(x+1)^3}-8\sqrt{x+1}+C.$$

Среди интегралов, вычисляемых с помощью замены переменной, выделим интегралы вида:

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx \qquad \text{и} \qquad \int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

При их вычислении необходимо выделить в знаменателе полный квадрат, для чего используется стандартная замена:

$$x = t - \frac{b}{2a},\ dx = dt,\ t = x + \frac{b}{2a}. \qquad (2)$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x-2}{x^2+6x+10}dx.$

Решение.

$$\int \frac{x-2}{x^2+6x+10}dx = \left\{ \begin{matrix} \text{Используем} & \text{замену} & (2), \\ \text{учтем,} & \text{что} & a=1, \quad b=6 \end{matrix} \right\} = \left| \begin{matrix} x = t-3 \\ dx = dt \\ t = x+3 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t-3-2}{(t-3)^2+6(t-3)+10}dt = \int \frac{t-5}{t^2-6t+9+6t-18+10}dt = \int \frac{t-5}{t^2+1}dt = \int \frac{tdt}{t^2+1} -$$

$$-5\int \frac{dt}{t^2+1} = \left| \begin{matrix} \text{для 1-го интеграла} \\ z = t^2+1 \\ dz = 2tdt;\ tdt = \dfrac{dz}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - 5\int \frac{dt}{t^2+1} = \left\{ \begin{matrix} \text{формулы 4, 13} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\ln|z| -$$

$$-5\,\mathrm{arctg}\, t + C = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| - 5\,\mathrm{arctg}\, t + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| - 5\,\mathrm{arctg}(x+3) + C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$
Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$

$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U=\ln kx \to dU=\dfrac{dx}{x}$	
$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U=\arcsin kx \to dU=\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U=\arccos kx \to dU=-\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	$dV=P_n(x)dx\to$ $\to V=\int P_n(x)dx$
$\int \operatorname{arctg} kx\, P_n(x)dx$	$U=\operatorname{arctg} kx \to dU=\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx\, P_n(x)dx$	$U=\operatorname{arcctg} kx \to dU=-\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n=0,1,2,...$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример. Проинтегрировать по частям.

а) $\int(3x-1)\sin 2xdx;$ *б*) $\int(1+2x)\ln xdx.$

Решение.

$$а)\ \int(3x-1)\sin 2xdx=\left|\begin{array}{l}U=3x-1\to dU=3dx\\ dV=\sin 2xdx\to V=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}\right|=(3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2})+\int\frac{\cos 2x}{2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\ \int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{array}{l}U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x}\\ dV=(1+2x)dx\to\\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{array}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Определение. *Рациональной дробью* называется отношение двух многочленов:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \qquad (4)$$

где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ многочлены от x степеней m и n соответственно.

Рациональная дробь (4) называется *правильной*, если $m<n$ и *неправильной*, если $m\geq n$.

Определение. *Простейшими рациональными дробями* называют правильные рациональные дроби четырех типов:

$$1)\frac{A}{x-a};\quad 2)\frac{A}{(x-a)^n};\quad 3)\frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad 4)\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где a, p, q, A, M, N — действительные числа, $n=2, 3, \ldots$

При этом предполагается, что квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Простейшей дроби 1-го и 2-го типов интегрируются заменой $t=x-a$. а 3-го типа — заменой (2). Интегрирование простейших дробей 4-го типа является громоздкими, и мы его рассматривать не будем.

Теорема (о представлении рациональной дроби в виде суммы простейших дробей). Всякую правильную рациональную дробь можно представить, и потом единственным образом, в виде суммы простейших дробей типов 1) — 4). При этом каждому множителю в знаменателе вида $(x-a)^n$ будет соответствовать группа из n слагаемых вида $\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \frac{A_n}{(x-a)^n}$, а каждому множителю в знаменателе вида $(x^2+px+q)^n$ — слагаемые $\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}, \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}, \ldots, \frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}$.

Постоянные $A_1, A_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots, N_1, N_2, \ldots$ называют *неопределенными коэффициентами* и находят по следующему алгоритму:

1) Сумму всех простейших дробей привести к общему знаменателю, который равен знаменателю дроби в левой части тождества.
2) Числитель получившейся дроби приравнять к числителю исходной дроби.
3) Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов в левой и правой частях полученного тождества.
4) Решить полученную систему уравнений, которая имеет единственное решение.

Теорема (о представлении неправильной рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной дроби). Всякую неправильную рациональную дробь $Q_m(x)/P_n(x)$ $(m\geq n)$ можно разложить, и притом единственным образом, на сумму многочлена $W_{m-n}(x)$ (целая часть) и правильной рациональной дроби $S_r(x)/P_n(x)$ $(r<n)$ ($S_r(x)$ — «остаток» от деления $Q_m(x)$ на $P_n(x)$):

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=W_{m-n}(x)+\frac{S_r(x)}{P_n(x)}.$$

Итак, алгоритм интегрирования рациональных дробей:

1) Если подынтегральная дробь неправильная, то из неё выделяют целую часть $W_{m-n}(x)$, которая интегрируется непосредственно, и правильную рациональную дробь $S_r(x)/P_n(x)$ $(r<n)$.
2) Правильную рациональную дробь $S_r(x)/P_n(x)$ $(r<n)$ раскладывают на сумму простейших дробей 1) — 4).
3) Простейшие дроби интегрируют по отдельности с помощью соответствующих замен переменных.

Пример. Найти интегралы от рациональных дробей.

а) $\int \frac{x^3}{x-1}dx;$ б) $\int \frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}dx.$

Решение.

а) Подынтегральная дробь неправильная, поэтому выделим целую часть путем деления многочлена на многочлен «углом»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 \qquad\qquad & x-1 \\
\cline{2-2}
x^3-x^2 \qquad & x^2+x+1 \quad \text{– целая часть } W_2(x) \\
\cline{1-1}
-\,x^2 \qquad & \\
x^2-x \quad & \\
\cline{1-1}
-\,x \quad & \\
x-1 & \\
\cline{1-1}
1 & \quad \text{— остаток } S_0(x)
\end{array}
$$

Итак, $\frac{x^3}{x-1}=x^2+x+1+\frac{1}{x-1}.$

Тогда

$$\int \frac{x^3}{x-1}dx=\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=\int x^2dx+\int xdx+\int dx+\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{формулы} \quad 3,\ 2 \\ \text{таблицы} \quad \text{интегралов,} \\ \text{для} \quad \text{последнего} \quad \text{интеграла} \\ \text{замена} \quad t=x-1, \quad dt=dx \quad \text{и} \\ \text{формула} \quad 4\end{array}\right\}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$$

б) Подынтегральная дробь правильная, знаменатель это дроби разложим на множители, а затем разложим дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{x^2+1}{x^2\left(x^2-2x+1\right)}=\frac{x^2+1}{x^2\left(x-1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{\left(x-1\right)^2}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{приведем сумму} \\ \text{простейших дробей} \\ \text{к общему знаменателю}\end{array}\right\}=\frac{A_1^{\backslash x(x-1)^2}}{x}+\frac{A_2^{\backslash(x-1)^2}}{x^2}+\frac{A_3^{\backslash x^2(x-1)}}{x-1}+\frac{A_1^{\backslash x^2}}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A_1x(x^2-2x+1)+A_2(x^2-2x+1)+A_3x^2(x-1)+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}.$$

Итак, получим

$$\frac{x^2+1}{x^2\left(x-1\right)^2}=\frac{A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}.$$

Поскольку знаменатели исходной и полученной дробей одинаковы, то приравняем их числители и получим тождество

$$x^2+1=A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2.$$

Сгруппируем в правой части слагаемые с одинаковыми степенями, а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях:

$$x^2+1\equiv x^3\left(A_1+A_3\right)+x^2\left(-2A_1+A_2-A_3+A_4\right)+x\left(A_1-2A_2\right)+A_2$$

$$\begin{array}{c|c} x^3 & 0=A_1+A_3, \\ x^2 & 1=-2A_1+A_2-A_3+A_4, \\ x^1 & 0=A_1-2A_2, \\ x^0 & 1=A_2. \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\Rightarrow \begin{array}{c} A_3=-A_1=-2, \\ A_4=1+2A_1-A_2+A_3, \\ A_1=2A_2=2, \\ A_2=1. \end{array}$$

Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Вернемся к вычислению интеграла:

$$\int\frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx=2\int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}dx-$$

$$-2\int\frac{dx}{x-1}++2\int(x-1)^{-2}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{формулы 4, 3 таблицы интегралов,}\\ \text{для 3-го и 4-го интегралов за-}\\ \text{мена } t=x-1,\ dt=dx \text{ и формулы}\\ \text{ 4, 3таблицы интегралов}\end{array}\right\}=2\ln|x|+$$

$$+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}--2\ln|x-1|+2\frac{\left(x-1\right)^{-2+1}}{-2+1}+C=2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Рассмотрим некоторые из интегралов от тригонометрических функций. Виды интегралов и способы их вычисления приведем в таблице 2.

Таблица 2.

Вид интеграла	**Метод интегрирования**
$\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ Общий случай	Замена $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2},\quad x=2\mathrm{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$ $\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$
$\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$, где $R\left(-\sin x,\cos\right)=-R\left(\sin x,\cos x\right),$ т.е. подынтегральная функция нечётная относительно $\sin x$.	Замена $t=\cos x,\ dt=-\sin xdx.$
$\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$, где	Замена $t=\sin x,\ dt=\cos xdx.$

$R(\sin x, -\cos) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е. поинтегральная функция нечётная относительно $\cos x$	
$\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(-\sin x, -\cos) = R(\sin x, \cos x)$, т.е. подинтегральная функция чётная относительно $\sin x$ и $\cos x$	Замена $t = \mathrm{tg}x, \quad x = \mathrm{arctg}t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
$\int \cos^{2n-1} x \sin^{\alpha} x dx$, где $n \in \square$, $\alpha \in \square$.	Замена $t = \sin x,\ dt = \cos x dx.$ Если $n = 2, 3, \ldots$, то необходимо учитывать формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$
$\int \sin^{2n-1} x \cos^{\alpha} x dx$, где $n \in \square$, $\alpha \in \square$.	Замена $t = \cos x,\ dt = -\sin x dx.$ Если $n = 2, 3, \ldots$, то необходимо учитывать формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$
$\int \cos^{2n} x \sin^{2m} x dx$, где $n, m \in \square$.	Использовать формулы понижения степени: $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x).$
$\int \begin{Bmatrix} \cos mx \cos nx \\ \sin mx \sin nx \\ \sin mx \cos nx \end{Bmatrix} dx$	Использовать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму: $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$, $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$, $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\big)$.

Пример. Найти интегралы:

$$а)\int \sqrt[3]{\sin x}\cos x dx; \quad б)\int \sin 3x \cos 7x dx; \quad в)\int \sin^2 11x dx; \quad г)\int \frac{dx}{4-\cos x};$$

$$д)\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}; \quad е)\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1}dx.$$

Решение.

$$a)\int\sqrt[3]{\sin x}\cos x dx=\left|\begin{matrix}\cos x \text{ в нечётной}\\ \text{степени, замена}\\ t=\sin x,\ dt=\cos x dx\end{matrix}\right|=\int\sqrt[3]{t}dt=\int t^{\frac{1}{3}}dx=\left\{\begin{matrix}\text{формула 3}\\ \text{таблицы ин-}\\ \text{тегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}}x+C.$$

$$б)\int\sin 3x\cos 7x dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем фор-}\\ \text{мулу} \sin\alpha\cos\beta\\ \text{из таблицы 2}\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{2}\left(\sin\left(3x-7x\right)+\sin\left(3x+7x\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\sin\left(-4x\right)+\sin 10x\right)dx=\left\{\begin{matrix}\text{учтем, что } \sin x \text{—}\\ \text{нечетная функция,}\\ \text{т.е. } \sin\left(-\alpha\right)=-\sin\alpha\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\int\sin 4x dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\sin 10x dx=\left\{\begin{matrix}\text{после замены } u=4x \text{ для первого}\\ \text{интеграла и } u=10x \text{ для второго}\\ \text{используем формулу 8 таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x\right)+C=\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C.$$

$$в)\int\sin^2 11x dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулу}\\ \text{понижения степени}\\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2}\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{2}\left(1-\cos 22x\right)dx=\frac{1}{2}\int dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\cos 22x dx==\left\{\begin{matrix}\text{формулы 2,7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{22}\sin 22x+C=\frac{1}{2}-\frac{1}{44}\sin 22x+C.$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{4-\cos x} = \left| \begin{array}{l} \text{подынтегральная функция не обладает} \\ \text{ни одним из перечисленных в таблице} \\ \text{свойств, поэтому используем замену} \\ \text{для общего случая} \\ t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{4-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{5t^2+3} =$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2+\dfrac{3}{5}} = \left| \begin{array}{l} \text{формула 13} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right| = \frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{5}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\dfrac{3}{5}}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

$$
д)\ \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \text{подынтегральная функция чётная относительно} \\ \sin x \text{ и } \cos x, \text{ поэтому замена } \quad t = \mathrm{tg}x,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =
$$

$$
= \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1+t^2} + 2\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \dfrac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \left| \begin{array}{l} \text{замена по формуле (2)} \\ t = z-1,\ dt = dz,\ z = t+1 \end{array} \right| =
$$

$$
= \int \frac{dz}{(z-1)^2 + 2(z-1) - 1} = \int \frac{dz}{z^2 - 2z + 1 + 2z - 2 - 1} = \int \frac{dz}{z^2-2} = \left| \begin{array}{l} \text{формула 14 таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right| =
$$

$$
= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\mathrm{tg}x+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}x+1+\sqrt{2}} \right| + C.
$$

$$
е)\ \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1} dx = \int \frac{(1+\sin^2 x)\sin x}{2\cos^2 x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} \text{используем тригонометрическую} \\ \text{формулу} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{array} \right| =
$$

$$
= \int \frac{(2-\cos^2 x)\sin x}{2\cos^2 x - 1} dx = \left| \begin{array}{l} \text{подынтегральная функция нечётная относительно} \\ \sin x, \text{ поэтому замена } t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx \end{array} \right| =
$$

$$
= -\int \frac{2-t^2}{2t^2-1} dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1} dt = \left| \begin{array}{l} \text{подынтегральная функция - неправильная ра-} \\ \text{ционая дробь, поделим её в столбик и получим :} \\ \begin{array}{r|l} _-t^2 - 2 & \underline{2t^2-1} \\ \underline{t^2 - 0{,}5} & 0{,}5 \\ -1{,}5 & \end{array} \end{array} \right| =
$$

$$
= \int \left(0{,}5 - \frac{1{,}5}{2t^2-1} \right) dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \dfrac{1}{2}} = \left| \begin{array}{l} \text{формулы (2) и (14)} \\ \text{таблицы интегралов} \end{array} \right| = \frac{1}{2}t -
$$

$$
-\frac{3}{4}\frac{1}{2\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \ln\left| \frac{t - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{t + \dfrac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1} \right| + C.
$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. *Иррациональностью* от x называют выражение, содержащее переменную x в дробной степени.

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(ax+b,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},...,(ax+b)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx,$$

где R — рациональная функция; m_1, n_1, m_2, n_2, . . . — целые числа.

Подстановка, рационализирующая подынтегральную функцию, имеет вид:

$$ax+b=t^S,\ adx=St^{S-1}dt,\ dx=\frac{S}{a}t^{S-1}dt,$$

где S — наименьшее общее кратное (НОК) чисел $n_1, n_2,..., n_k$, т. е. наименьшее натуральное число, делящееся нацело на $n_1, n_2,..., n_k$.

Пример. Проинтегрировать иррациональность $\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx.$

Решение.

$$\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}dx=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{4}}}dx=\left\{\begin{matrix}\text{НОК}(2,3,4)=12\\ x=t^{12},\ t=x^{\frac{1}{12}}\\ dx=12t^{11}dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(t^{12}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(t^{12}\right)^{\frac{1}{4}}}12t^{11}dt=$$

$$=12\int\frac{t^6-t^8}{t^4-t^3}t^{11}dt=12\int\frac{t^6\left(1-t^2\right)}{t^3(t-1)}t^{11}dt=12\int\frac{t^3(1-t)(1+t)}{t-1}t^{11}dt=-12\int(1+t)t^{14}dt=$$

$$=-12\int t^{14}dt-12\int t^{15}dt=\left\{\begin{matrix}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}=-12\frac{t^{15}}{15}-12\frac{t^{16}}{16}+C=$$

$$=-\frac{4}{5}\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{15}-\frac{3}{4}\left(x^{\frac{1}{12}}\right)^{16}+C=-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВКИ

Рассмотрим интегралы, которые приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin t$ и $\cos t$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки. Виды интегралов и способы их вычисления приведем в таблице 3.

Таблица 3.

Вид интеграла	**Подстановка**
$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$	$x=a\sin t$, $dx=a\cos tdt$ или $x=a\cos t$, $dx=-a\sin tdt$
$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$	$x=a\mathrm{tg}t$, $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}$ или $x=a\mathrm{ctg}t$, $dx=-\frac{adt}{\sin^2 t}$
$\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$	$x=\frac{a}{\sin t}$, $dx=-\frac{a\cos xdt}{\sin^2 t}$ или $x=\frac{a}{\cos t}$, $dx=\frac{a\sin tdt}{\cos^2 t}$

Пример. Найти интегралы а) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx$; б) $\int \frac{dx}{\left(5+x^2\right)\sqrt{5+x^2}}$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-16}}$.

Решение.

$$a)\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}dx = \left|\begin{matrix} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos tdt \end{matrix}\right| = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos tdt}{3\sin t} = \int \frac{3\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt}{\sin t} =$$

$$= 3\int \frac{\cos^2 tdt}{\sin t} = 3\int \frac{\left(1-\sin^2 t\right)dt}{\sin t} = 3\int \frac{dt}{\sin t} - 3\int \sin tdt = \left\{\begin{matrix} \text{формулы 15 и 8} \\ \text{таблицы интегралов} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + 3\cos t + C = \left\{\begin{matrix} \text{используем формулы} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ и } \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \end{matrix}\right\} = 3\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right| +$$

$$+3\sqrt{1-\sin^2 t} + C = 3\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{\frac{x}{3}}\right| + 3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + C = 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-x^2} + C.$$

$$\text{б) }\int \frac{dx}{\left(5+x^2\right)\sqrt{5+x^2}} = \left|\begin{matrix} x = \sqrt{5}\operatorname{tg}t \\ dx = \frac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t} \end{matrix}\right| = \int \frac{\frac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t}}{\left(5+5\operatorname{tg}^2 t\right)\sqrt{5+5\operatorname{tg}^2 t}} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t}}{5\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)\sqrt{5\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)}} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{используем формулу} \\ 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{\sqrt{5}dt}{\cos^2 t}}{\frac{5}{\cos^2 t}\frac{\sqrt{5}}{\cos t}} = \frac{1}{5}\int \cos tdt = \left\{\begin{matrix} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}\sin t + C =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{используем формулу} \\ \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}\frac{\frac{x}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{5}}} + C = \frac{x}{5\sqrt{5+x^2}} + C.$$

$$\text{в) }\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}} = \left|\begin{matrix} x = \frac{4}{\sin t} \\ dx = -\frac{4\cos tdt}{\sin^2 t} \end{matrix}\right| = -\int \frac{\frac{4\cos tdt}{\sin^2 t}}{\frac{16}{\sin^2 t}\sqrt{\frac{16}{\sin^2 t}-16}} = -\int \frac{\frac{4\cos tdt}{\sin^2 t}}{\frac{16}{\sin^2 t}\frac{4\cos t}{\sin t}} = -\frac{1}{16}\int \sin tdt =$$

$$= \left\{\begin{matrix} \text{формула 8} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{16}\cos t + C = \frac{1}{16}\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \frac{1}{16}\sqrt{1-\frac{16}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2-16}}{16x} + C.$$

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу отрезком [a,b] оси OX и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, параллельными оси OY.

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, которая непрерывна и неотрицательна на отрезке [a,b]. Выполним следующие построения:

1. Основание трапеции разобьём точками $x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \dots, x_n = b$ на n произвольных частей и обозначим длины отрезков $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\quad i = 1, 2, \dots, n.$
2. Из точек разбиения восстановим перпендикуляры и через ΔS_i обозначим площадь трапеции с основанием Δx_i. Тогда площадь криволинейной трапеции $S_{\text{кр.тр.}} = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i.$
3. Внутри каждого отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ возьмём произвольную точку C_i и вычислим в ней значение функции $f(C_i)$. Площадь каждой из трапеций будет приближённо равна площади прямоугольника со сторонами Δx_i и $f(C_i)$. Тогда

$$S_{\text{кр.тр.}} \approx \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i. \qquad (5)$$

Отметим, что сумма в правой части равенства (5) $G_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i$ называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке [a,b].

4. Обозначим λ длину наибольшего из отрезков разбиений Δx_i, т.е., $\lambda = \max\{\Delta x_i\},\quad i = 1, 2, \dots, n.$ В равенстве (5) перейдём к пределу при $\lambda \to 0$ и получим:

$$S_{\text{кр.тр.}} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i. \qquad (6)$$

Таким образом, вычисление площади криволинейной трапеции свелось к вычислению предела интегральной суммы для функции $f(x)$.

Определение. Если существует предел при $\lambda \to 0$ всех интегральных сумм, составленных для функции $f(x)$ на отрезке [a,b], не зависящий ни от способа разбиения [a,b] на части, ни от выбора произвольной точки внутри каждого отрезка, то этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке [a,b] . Обозначается определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i, \qquad (7)$$

где a называется нижним пределом, а b — верхним пределом.

Сравнивая формулы (6) и (7), получаем *геометрический смысл определённого интеграла:* определённый интеграл от неотрицательной функции $f(x)$ равен площади криволинейной трапеции с основанием [a,b] и ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, т.е. $S_{\text{кр.тр.}} = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Теорема (существования определённого интеграла). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то существует определённый интеграл от этой функции на отрезке [a,b].

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx;$

2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0;$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx;$

4) $\int\limits_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx;$

5) $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx,\ C - \text{const};$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$

8) **Теорема** (о среднем значении функции на отрезке). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то между точками a и b найдётся точка x=c, такая что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$

Определение. Средним значением функции $f(x)$ на отрезке [a,b] называется величина $f_{cp} = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)}{b-a}.$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема (о производной от интеграла с переменным верхним пределом). Производная от определённого интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции на этом верхнем пределе:

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Доказательство:

Обозначим $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt.$ Придадим переменной x приращение $\Delta x,$ тогда $\Phi(x)$ получит приращение:

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt=\begin{Bmatrix}\text{к первому интегралу}\\ \text{применим свойство 3}\\ \text{определённого интеграла}\end{Bmatrix}=$$

$$=\int\limits_a^x f(t)dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)\,dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$\Delta\Phi=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\begin{Bmatrix}\text{применим теорему}\\ \text{о среднем}\end{Bmatrix}=f(c)\Delta x,$ где c – некоторая точка между x и $x+\Delta x.$ По определению производной $\frac{d\Phi}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x).$

Следствие. $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt-$ первообразная для функции $f(x)$.

Теорема (формула Ньютона-Лейбница). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b], то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \qquad (8)$$

где $F(x)-$ любая первообразная для функции $f(x)$, т.е., $F'(x)=f(x).$

Доказательство:

По следствию из предыдущей теоремы $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt-$ первообразная для функции $f(x)$. По теореме о первообразной для данной функции любая другая первообразная $F(x)$ отличается от $\Phi(x)$ на постоянное слагаемое:

$\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)+C.$ При $x=a$ получим $\int\limits_a^a f(t)dt=F(a)+C=0$ (по свойству 2 определённого интеграла).Следовательно, $C=-F(a)$ и $\int\limits_a^x f(t)dt=F(x)-F(a).$ При $x=b$ $\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$

Пример. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_1^2\left((1+x)^2+\sqrt{x}\right)dx.$

Решение.

$$\int_1^2\left((1+x)^2+\sqrt{x}\right)dx=\int_1^2(1+x)^2\,dx+\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}dx=\left.\frac{(1+x)^3}{3}\right|_1^2+\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_1^2=\frac{(1+2)^3}{3}-\frac{(1+1)^3}{3}+$$

$$+\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)=9-\frac{8}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}=\frac{17+4\sqrt{2}}{3}.$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема (о замене переменной в определённом интеграле). Если функция $x=\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha,\beta]$, при этом когда $t\in[\alpha,\beta]$, значение функции $\varphi(t)\in[a,b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (9)$$

Алгоритм замены переменной в определённом интеграле:

1. Старую переменную и новую связать соотношением $x=\varphi(t)$;
2. Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)\,dt$.
3. Определить новые пределы интегрирования α и β из уравнений $a=\varphi(\alpha),\quad b=\varphi(\beta)$.
4. В искомом интеграле перейти к новой переменной по формуле (9) и заменить пределы интегрирования. Проинтегрировать и вычислить по формуле Ньютона-Лейбница (8).

Пример. Вычислить определённый интеграл $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{используем тригонометрическую}\\ \text{подстановку } x=\sin t\ dx=\cos t\,dt\\ \text{заменим пределы интегрирования:}\\ x=0\Rightarrow\sin t=0\Rightarrow t=0;\\ x=1\Rightarrow\sin t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=\left.\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-0\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Формула интегрирования по частям (3) в случае определённого интеграла приобретает вид:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU, \qquad (10)$$

Пример. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x-1)\cos x dx = \begin{vmatrix} U = 2x-1 \Rightarrow dU = 2dx \\ dV = \cos x dx \Rightarrow V = \sin x \end{vmatrix} = (2x-1)\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx =$$

$$= \left(2\frac{\pi}{4}-1\right)\sin\frac{\pi}{4} - (-1)\sin 0 + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} -$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} - 2 = \frac{(\pi+2)\sqrt{2}-8}{4}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Определенный интеграл широко используется в различных приложениях, например, при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объемов тел вращения, площадей поверхностей вращения, работы переменной силы на отрезке, пути, пройденного за промежуток времени, статических моментов и моментов инерции плоских дуг и фигур и т. д.

Площади плоских фигур

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Теорема. Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (11)$$

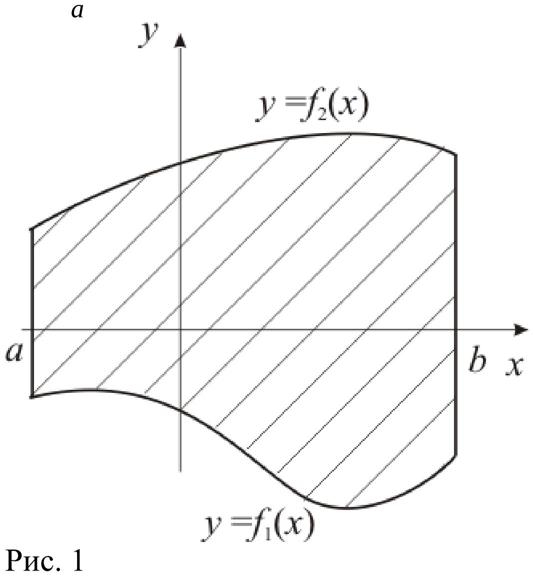


Рис. 1

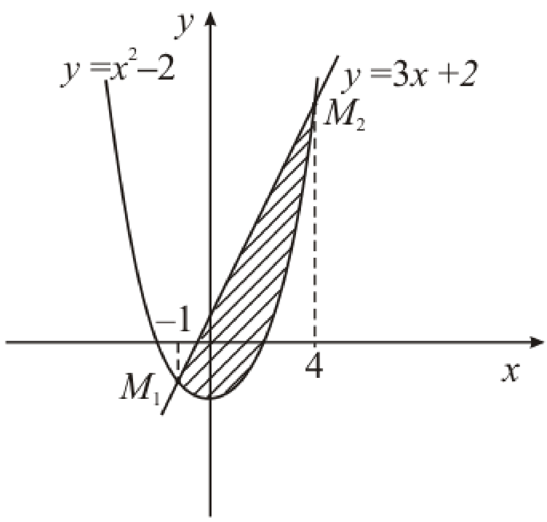


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1,-1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y=x^2-2$ и прямой $y=3x+2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-2, \\ y=3x+2. \end{cases} \Rightarrow x^2-2=3x+2, \quad x^2-3x-4=0, \quad x_1=-1, \ \ x_2=4.$$

Тогда $y_1=3\cdot(-1)+2=-1, \ \ y_2=3\cdot 4+2=14.$ Итак, $M_1(-1,-1), \ \ M_2(4,14).$

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (11), в которой $f_2(x)=3x+2, \ \ f_1(x)=x^2-2,$ поскольку $f_2(x)\ge f_1(x)$ для всех $x\in[-1,4]$. Получим:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot 4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot 4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Теорема. Если функции $y=y(t)$ и $x=x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t\in[t_0,\,t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[t_0,\,t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a = x(t_0)$, $b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S=\left|\int_{t_0}^{t_1} y(t)\,x'(t)\,dt\right|. \qquad (12)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$x=2\cos t, \ \ y=3\sin t, \ \ 0\le t\le 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (x, y) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t, \ 0\le t\le 2\pi.$

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	2	0	–2	0	2
y	0	3	0	–3	0

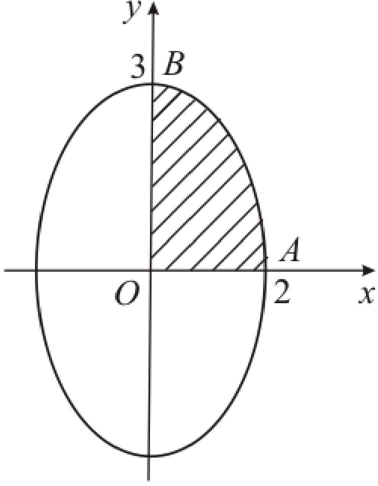


Рис. 3

Нанесем точки (x, y) на координатную плоскость XOY и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями a и b). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей OX и OY, найдем её площадь S, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции AOB. Согласно формуле (12) получим:

$$S = 4\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\left(2\cos t\right)' dt\right| = 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt\right| = \left\{\begin{matrix} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= 4\left|-6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right) dt\right| = 4\left|-3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 2t\right) dt\right| = 4\left|-3\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right| =$$

$$= 4\left|-3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right)\right)\right| = 4\left|-3\frac{\pi}{2}\right| = 6\pi \approx 18{,}850 \text{ (кв. ед.)}.$$

Заметим, что для вычисления площади по формуле (9), построение чертежа не является обязательным, а носит иллюстративный характер.

Длина дуги плоской кривой

Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a, b]$, то длина дуги AB (рис. 4) этой кривой, заключенной между точками $A\big(a, f(a)\big)$ и $B\big(b, f(b)\big)$, вычисляется по формуле:

$$l_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (13)$$

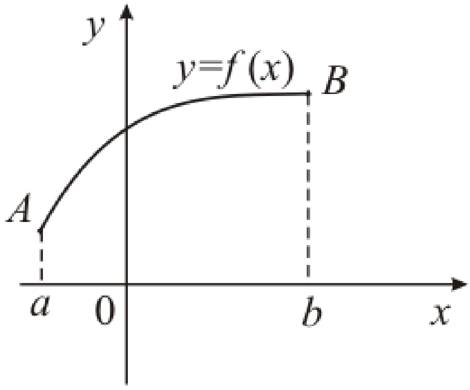


Рис. 4

Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le t_1$, и функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги AB, соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1, вычисляется по формуле:

$$l_{AB}=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,dt. \qquad (14)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y=x^{3/2},\ 0\le x\le 1;$ б) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y=f\left(x\right)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (13). Найдем y':

$y'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (13):

$$l_{AB}=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx=\left|\begin{array}{l} t=1+\dfrac{9x}{4}, dt=\dfrac{9}{4}dx, dx=\dfrac{4}{9}dt,\\ x=0\to t=1,\\ x=1\to t=1+\dfrac{9}{4}=\dfrac{13}{4}.\end{array}\right|=$$

$$=\frac{4}{9}\int_1^{13/4}t^{\frac{1}{2}}dt=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\}=\frac{4}{9}\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{13/4}=\left.\frac{8}{27}t^{\frac{3}{2}}\right|_1^{13/4}=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)\approx 1{,}440\ \left(\text{единиц длины}\right).$$

б) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t,\ 0\le t\le 2\pi.$

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (14). Найдем $x'(t),\ y'(t)$:

$x'(t)=-2\sin t+2\sin 2t,\ y'(t)=2\cos t-2\cos 2t$ и подставим в (14):

$$l_{AB}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-2\sin t+2\sin 2t\right)^2+\left(2\cos t-2\cos 2t\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 t-8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 t-8\cos t\cos 2t+4\cos^2 2t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+4\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)-8\left(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t\right)}\,dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем тригонометрические формулы}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ и } \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{matrix}\right\}=\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos t}\,dt=$$

$$=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулу}\\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\alpha\right)\Rightarrow\\ \Rightarrow 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\}=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-8\left(\cos\pi-\cos 0\right)==-8\left(-1-1\right)=16\left(\text{ед. длины}\right).$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью *OX* и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx. \qquad (15)$$

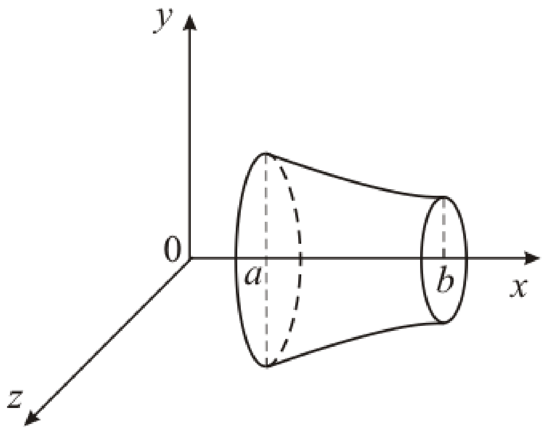


Рис. 5

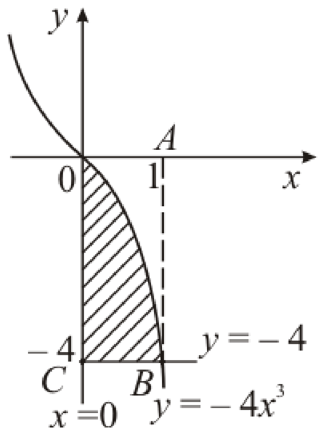


Рис. 6

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3$, $x=0$, $y=-4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (15) найдем V_1 и V_2:

$$V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2\, dx = \pi 16x\Big|_0^1 = 16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА В ЭКОНОМИКЕ

Рассмотрим экономический смысл определённого интеграла. Пусть функция $y = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Тогда определённый интеграл $\int_0^T f(t)\,dt$ есть объём Q выпускаемой продукции за промежуток времени $[0, T]$.

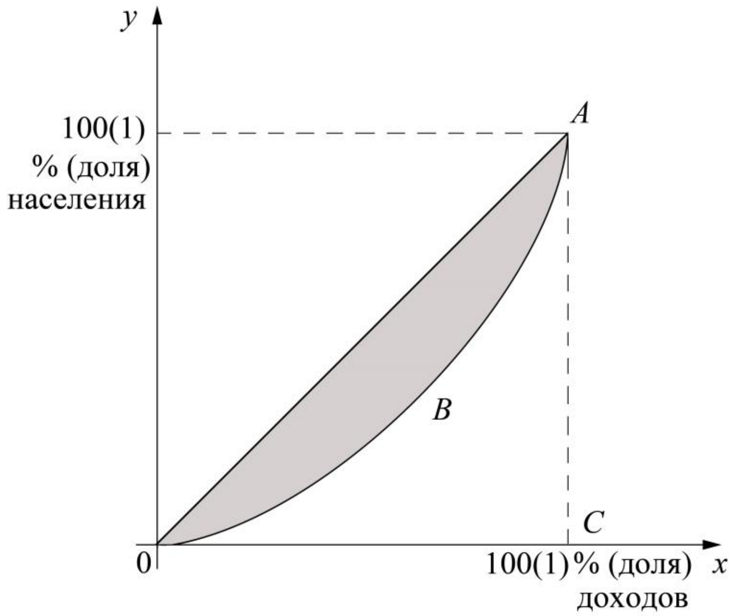
Пример. Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задаётся функцией $f = 32 - 2^{-0{,}5t+5}$, где t – время в месяцах. Найти объём продукции, произведённой за третий месяц от начала внедрения технологического процесса.

Решение. Согласно экономическому смыслу определённого интеграла искомый объём продукции

$$Q = \int_2^3 \left(32 - 2^{-0{,}5t+5}\right)dt = \left(32t + 2\frac{2^{-0{,}5t+5}}{\ln 2}\right)\Bigg|_2^3 = \left(32t + 64\frac{2^{-0{,}5t}}{\ln 2}\right)\Bigg|_2^3 = 32(3-2) +$$

$$+\frac{64}{\ln 2}\left(2^{-0{,}5\cdot 3} - 2^{-0{,}5\cdot 2}\right) = 32 + \frac{64}{\ln 2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right) \approx 18{,}48.$$

Определённый интеграл находит и другие применения в экономике. Например, при исследовании кривой Лоренца, которая определяет зависимость процента доходов от процента имеющего их населения (кривая *OBA*). При равномерном распределении доходов кривая Лоренца вырождается в прямую – биссектрису *OA*, поэтому площадь фигуры *OAB* между биссектрисой *OA* и кривой Лоренца, отнесённая к площади треугольника *OAC* (коэффициент Джини), характеризует степень неравенства в распределении доходов населения. Используется определённый интеграл при вычислении дисконтированных доходов, денежных средств, сберегаемых потребителем, при продаже товара по равновесной цене (выигрыш потребителя) и т.п.



НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение. Несобственными интегралами называются интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы 1-го рода) и интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы 2-го рода).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на полусегменте $[a,+\infty)$. Возьмём любое $b>a$ и рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$ то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a,+\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$ т.е. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$ Говорят, что в этом случае несобственный интеграл существует или сходится. Если при $b\to+\infty$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не имеет конечного предела, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ не существует или расходится.

Геометрический смысл несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ состоит в том, что при $f(x)\ge 0$ для всех $x\in[a,+\infty)$ он выражает площадь неограниченной области, заключённой между линиями $y=f(x),\quad x=a$ и осью *OX*.

Аналогично определяются несобственные интегралы на интервалах $(-\infty,b]$ и $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx;$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$ где c – любая точка на интервале $(-\infty,+\infty),$ причём $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует, если сходятся оба интеграла в пра вой части и расходится, если расходится хотя бы один из них.

Рассмотрим, как вычисляются несобственные интегралы 1-го рода.

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(F(x)\Big|_a^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(F(b)-F(a)\right) = \lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a),$$

где $F(x)-$ первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x)=f(x).$

Аналогично $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b)-\lim_{a\to-\infty}F(a)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}F(b)-\lim_{a\to-\infty}F(a).$

Пример. Вычислить $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$

Решение.

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

Рассмотрим несобственные интегралы 2-го рода. Пусть функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c\in[a,b]$ и непрерывна при $a\le x<c$ и $c<x\le b,$ тогда полагают, что несобственный интеграл определяется формулой:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to0}\int_{a}^{c-\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to0}\int_{c+\beta}^{b} f(x)\,dx. \qquad (16)$$

При этом несобственный интеграл называется сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства и расходящимся, если не существует хотя бы один из них.

Геометрический смысл несобственного интеграла $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ состоит в том, что при $f(x)\ge0$ для всех $x\in[a,b]$ он выражает площадь неограниченной области, заключённой между линиями $y=f(x),\quad x=a,\quad x=b$ и осью *OX*.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}.$

Решение. Интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ является несобственным интегралом 2-го рода, так как промежуток интегрирования содержит точку бесконечного разрыва $x=0,$ поэтому согласно формуле (16):

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\alpha\to0}\int_{-1}^{0-\alpha}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\beta\to0}\int_{0+\beta}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\alpha\to0}\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{-\alpha}\right)+\lim_{\beta\to0}\left(-\frac{1}{x}\Bigg|_{\beta}^{1}\right)=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\alpha}+1-1+\lim_{\beta\to0}\frac{1}{\beta}=\infty\Rightarrow$$

несобственный интеграл расходится.

ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Точками $x_0=a,\quad x_1,\quad x_2,\ldots,x_n=b$ разобьём отрезок $[a,b]$ на n равных частей, длина каждой из которых равна $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n},\quad i=1,2,\ldots,n.$

Обозначим $y_0,\quad y_1,\ldots,y_n$ значения функции $f(x)$ в точках разбиения.

Метод прямоугольников

Учитывая геометрический смысл определённого интеграла и заменяя приближённо площади маленьких криволинейных трапеций площадями соответствующих прямоугольников, получим:

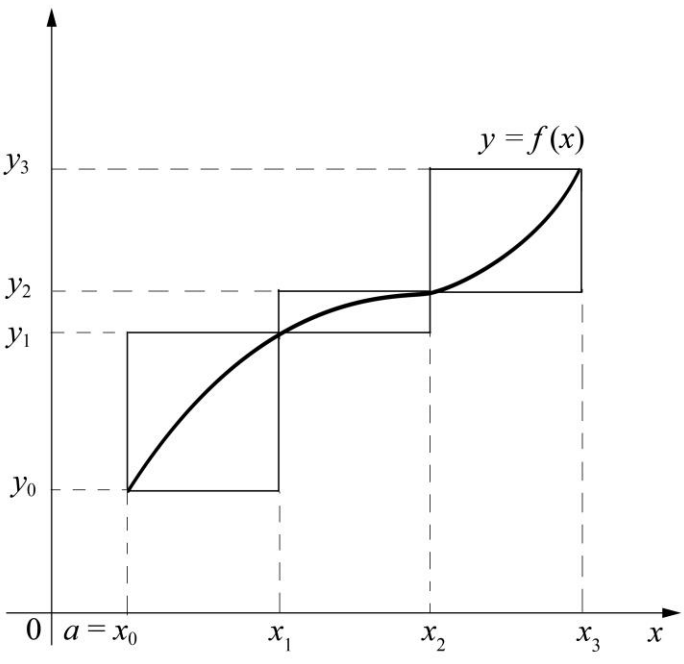
$$\int_a^b f(x)\,dx\approx y_0(x_1-x_0)+y_1(x_2-x_1)+\ldots+y_{n-1}(x_n-x_{n-1}).$$

Поскольку все отрезки одинаковой длины, то окончательно имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}). \qquad (17)$$

Формула (17) называется формулой левых прямоугольников для приближённого вычисления определённого интеграла. Выбирая прямоугольники другим способом, получим формулу правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n). \qquad (18)$$



Чем больше число разбиений n, тем точнее приближённое значение определённого интеграла, вычисленного по формулам (17) и (18).

Чтобы оценить найденное приближённое значение определённого интеграла число n отрезков разбиения увеличивают в два раза и сравнивают полученные значения интегралов и оставляют первые совпадающие знаки, если точность недостаточна, то снова удваивают число разбиений.

Отметим, что погрешность R формул прямоугольников оценивается формулой: $R \le \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$, где M_1 – верхняя граница модуля первой производной функции на отрезке $[a,b]$, т.е. $M_1 = \sup\left|f'(x)\right|, \quad x \in [a,b].$

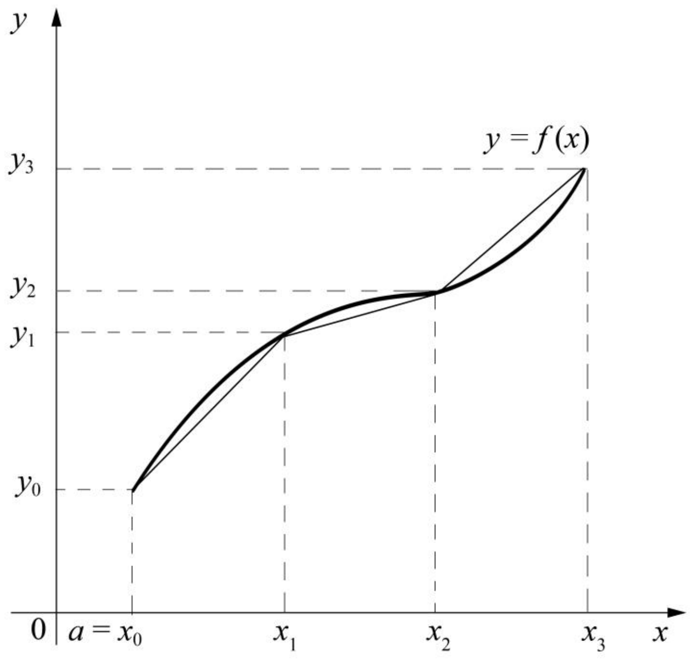
Метод трапеций

Каждую маленькую криволинейную трапецию приближённо заменим линейной трапецией, площадь которой $S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}\Delta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$ Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x_1 + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x_n.$$

Поскольку все отрезки одинаковой длины, то окончательно имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right). \qquad (19)$$



Формула (19) называется формулой трапеций для приближённого вычисления определённого интеграла. Для погрешности R формулы (19) спра-ведлива оценка $R \le \frac{M_2\left(b-a\right)^2}{12n^2}$, где M_2 – верхняя граница модуля второй производной функции на отрезке $[a,b]$, т.е. $M_2 = \sup\left|f''\left(x\right)\right|, \quad x \in [a,b]$.

Мы привели только два метода приближённого вычисления определённого интеграла, существует и другие численные методы вычисления определённых интегралов, учитывающих особенности подынтегральных функций.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1, 2, 3
«Введение в математический анализ. Элементы теории множеств и функций»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4, 5, 6, 7
«Предел и непрерывность функции одной переменной»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8, 9, 10, 11
«Производная и дифференциал функции одной переменной»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12, 13, 14
«Исследование дифференцируемых функций одной переменной»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15, 16, 17
«Функции нескольких переменных (ФНП)»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18, 19, 20,
«Дифференцируемые ФНП»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21, 22, 23, 24
«Интегрирование»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25, 26, 27
«Дифференциальные уравнения»

Методические рекомендации
по изучению дисциплины «Методы оптиизаци»
и организации самостоятельной работы

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение аудиторных занятий в виде лекций, практических занятий, а также самостоятельную работу.

Работа на лекции

На лекциях студенты получают самые необходимые знания по изучаемой проблеме. Непременным условием для глубокого и прочного усвоения учебного материала, является умение студентов сосредоточенно слушать лекции, активно, творчески воспринимать излагаемые сведения.

Внимательное слушание лекций предполагает интенсивную умственную деятельность студента. Краткие записи лекций, конспектирование их помогает усвоить материал. Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное, основное.

Запись лекций рекомендуется вести по возможности собственными формулировками. Желательно запись осуществлять на одной странице, а следующую оставлять для проработки учебного материала самостоятельно в домашних условиях. Конспект лучше подразделять на пункты, параграфы, соблюдая красную строку. Принципиальные места, определения, формулы следует сопровождать замечаниями. Работая над конспектом лекций, всегда следует использовать не только основную литературу, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор.

Лабораторные занятия

Подготовку к лабораторному занятию следует начинать с ознакомления с лекционным материалом, с изучения плана семинарских занятий. Определившись с проблемой, следует обратиться к рекомендуемой литературе.

Тщательная подготовка к практическим занятиям имеет важное значение: занятие пройдет так, как аудитория подготовилась к его проведению. Владение понятийным аппаратом изучаемого курса является необходимым, поэтому, готовясь к практическим занятиям, студенту следует активно пользоваться справочной литературой: энциклопедиями, словарями и др.

Самостоятельная работа

Студент в процессе обучения должен не только освоить учебную программу, но и приобрести навыки самостоятельной работы. Самостоятельная работа студентов играет важную роль в воспитании сознательного отношения самих студентов к овладению теоретическими и практическими знаниями, привитии им привычки к направленному интеллектуальному труду. Очень важно, чтобы студенты не просто приобретали знания, но и овладевали способами их добывания.

Самостоятельная работа проводится с целью углубления знаний по дисциплине и предусматривает:

- изучение отдельных разделов тем дисциплины;
- чтение студентами рекомендованной литературы и усвоение теоретического материала дисциплины;
- подготовку к практическим занятиям;
- работу с Интернет-источниками, базами данных;
- подготовку к различным формам контроля;
- самостоятельное решение задач или подготовку доклада по отдельной проблеме курса.

Последовательность всех контрольных мероприятий изложена в календарном плане, который должен доводиться до сведения каждого студента.

Планирование времени на самостоятельную работу, необходимого на изучение настоящей дисциплины, студентам лучше всего осуществлять на весь семестр, предусматривая при этом регулярное повторение пройденного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо регулярно дополнять сведениями из литературных источников, представленных в рабочей программе.

Изучение литературы следует начинать с освоения соответствующих разделов дисциплины в учебниках, затем ознакомиться с монографиями или статьями по той тематике, которую изучает студент, и после этого – с брошюрами и статьями, содержащими материал, дающий углубленное представление о тех или иных аспектах рассматриваемой проблемы.

Для расширения знаний по дисциплине студенту необходимо использовать Интернет-ресурсы и специализированные базы данных: проводить поиск в различных системах и использовать материалы сайтов, рекомендованных преподавателем на лекционных занятиях.

Подготовка к сессии

Каждый учебный семестр заканчивается аттестационными испытаниями: зачетно - экзаменационной сессией.

Подготовка к экзаменационной сессии и сдача зачетов и экзаменов является ответственейшим периодом в работе студента. Рекомендуется так организовать учебную работу, чтобы перед первым днем начала сессии были сданы и защищены все практические работы, предусмотренные графиком учебного процесса.

Основное в подготовке к сессии - это повторение всего материала курса или предмета, по которому необходимо сдавать экзамен. При подготовке к сессии следует весь объем работы распределять равномерно по дням, отведенным для подготовки, контролировать каждый день выполнения работы.

ЛЕКЦИИ

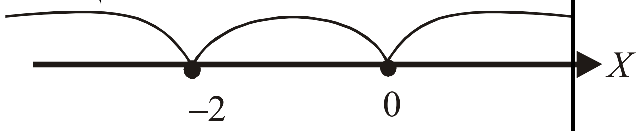
ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Краткие теоретические сведения, касающиеся исследования функции на экстремум, как локальный, так и глобальный, представим в виде таблицы на примере построения графика функции $y = x^3 + 3x^2 + 1$, используя общую схему исследования функции, а также определить абсолютный максимум и абсолютный минимум функции на отрезке [–1, 2].

Общая схема исследования и построения графика функции $y = f(x)$

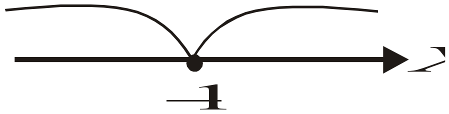
п/п	Краткие теоретические сведения	Пример
1	**<u>Область определения функции (о.о.ф.)</u>**. *Областью определенияD(f) функции* $y = f(x)$ называется множество всех $x \in X$ таких, что выражение $f(x)$ имеет смысл, т. е. взяв любое $x \in X$ и подставив в $f(x)$ можно найти соответствующее значение функции $f(x)$	$\underline{y = x^3 + 3x^2 + 1.}$ $y = x^3 + 3x^2 + 1$ определена для любого x, т. е. о.о.ф. $D(y) = \mathrm{R},\ x \in \mathrm{R}$ или $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2	**<u>Область непрерывности функции.</u>** Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* *в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.	Так как функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ определена на всей числовой оси, то она и непрерывна для любого $x \in (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

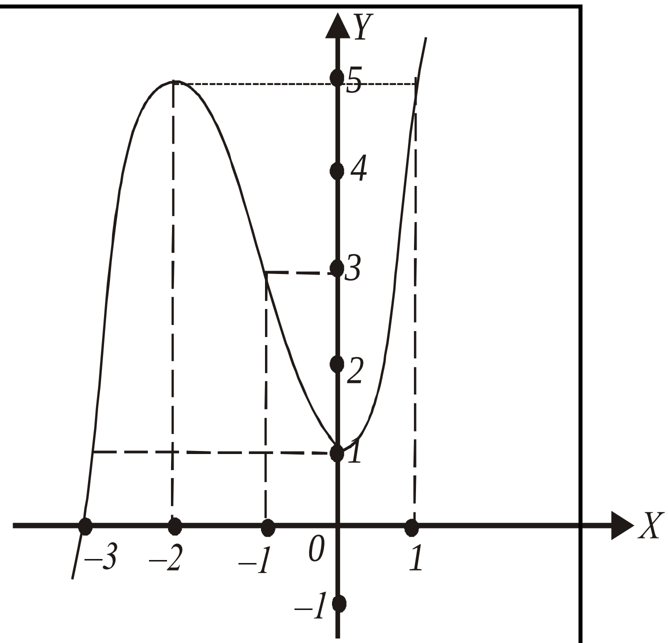
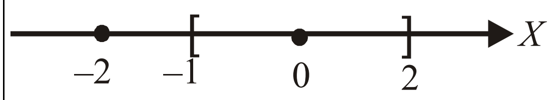
3	Исследовать функцию на чётность, нечётность. Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если $f(-x) = f(x)$, её график симметричен относительно оси OY. Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. Остальные функции называются *функциями общего вида*.	$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ $f(-x) = (-x)^3 + 3x^2 + 1 \neq f(x)$ $-f(x) = -x^3 - 3x^2 - 1 \neq f(-x)$ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$— общего вида
4	**<u>Определить (если возможно) точки пересечения</u>** графика функции с осями координат. Для этого решить системы: Пересечение с осью OY $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$; пересечение с осью OX $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ x = 0 \end{cases}$ $A(0,1)$ $\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 1 = 0.$ решение затруднено.
5	**<u>Определить асимптоты графика функции</u>**. Асимптотой кривой $y = f(x)$ называется прямая l, такое, что расстояние точки $(x, f(x))$ от этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки по кривой от начала координат. Различают вертикальные и наклонные асимптоты. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если x_0 есть точка бесконечного разрыва функции, т. е. если хотя бы один из односторонних пределов функции $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ x_0 - 0}} f(x) = \pm\infty.$ Прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$, если $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - x]$, причем оба предела существуют и конечны.	Т. к. функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ не имеет точек разрыва, то вертикальных асимптот у графика функции нет. $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} [x^2 + 3x + 1/x] =$ $= (\infty + \infty + 0) = \infty.$ Наклонных асиптот нет.

<table>
<tr>
<td>6</td>
<td><u>Определить интервалы монотонности и точки локального экстремума функции</u>. Функция $f(x)$ называется возрастающей на (a, b) ($f(x)$□), если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $f(x)$ называется убывающей на (a, b) ($f(x)$□), если для $x_2 > x_1 \in (a,b)$ $f(x_2) < f(x_1)$. Функция называется монотонной на (a, b), если $f(x)$ только □ или только □ на (a, b).
Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) > 0$, то $f(x)$□ на (a, b).
Если для всех $x \in (a,b)$ $f'(x) < 0$, то $f(x)$□ на (a, b).</td>
<td>а) Определим критические точки:
$f'(x) = 3x^2 + 6x$
$f'(x) = 0.$ $3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$
$3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x_2 = -2$
б) о.о.ф. найденными критическими точками разбиваем на интервалы и определяем знак $y'(x)$ внутри каждого</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума (max), [минимума (min)] функции $f(x)$, если существует некоторый интервал (α,β), содержащий точку x_0 такой, что для всех $x \in (\alpha,\beta)$ $f(x) < f(x_0)$
$[f(x) > f(x_0)]$ $(x \in (\alpha,\beta)$ $x \neq x_0)$.
Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума функции.
Необходимое условие экстремума. Если x_0 точка локального экстремума непрерывной функции $f(x)$, то её первая производная $f'(x)$ в точке x_0 или равна нулю, или не существует.
Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются критическими точками. Первое достаточное условие экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ изменился
с «+» на «–», то в точке x_0 локальный максимум;
с «–» на «+», то в точке x_0 локальный минимум;
если знак $f'(x)$ не изменился, то в точке x_0 экстремума нет.</td>
<td>интервала. Р[illegible]ты оформим в таблице.


<table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty,-2)$</td><td>–2</td><td>(–2; 0)</td><td>0</td><td>$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$y'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$y(x)$</td><td>□</td><td>□ □ max</td><td>□</td><td>□ □ min</td><td>□</td></tr>
</table>
$y_{\max} = y(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 1 = 5;$
$y_{\min} = y(0) = 1.$
$y'(-3) = 3\cdot(-3)(-3+2) = 9;$
$y'(-1) = 3\cdot(-1)(-1+2) = -3;$
$y'(1) = 3\cdot 1(1+2) = 9 > 0.$</td>
</tr>
</table>

21

<table>
<tr>
<td rowspan="2">7</td>
<td>Определить интервалы выпуклости функции, точки перегиба
Функция $y = f(x)$ называется выпуклой вверх ($\cap$) [вниз $\cup$] на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполняется неравенство:
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}; \left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \right].$$
Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются точками перегиба.
Если $f''(x) > 0$ всюду на (a, b), то функция $f(x)$ выпукла вниз ($\cup$) на (a, b).
Если $f''(x) < 0$ всюду на (a, b), то функция $f(x)$ выпукла вверх ($\cap$) на (a, b).</td>
<td>а) Определим точки, подозрительные
на перегиб:
$y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6;$
$y'' = 0. \;\; 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1.$
б) О.о.ф. найденными точками разбиваем на интервалы, определяем знак $f''(x)$ внутри каждого интервала.

</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Необходимое условие перегиба</u>: если x_0 — абсцисса точки перегиба непрерывной функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.
<u>Достаточное условие точки перегиба</u>: пусть $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Тогда если при переходе через x_0 знак второй производной $f''(x)$ изменился, то $(x_0, f(x_0))$ точка перегиба графика функции (при этом $f'(x_0)$ существует).</td>
<td><table>
<tr><td>x</td><td>$(-\infty,-1)$</td><td>-1</td><td>$(-1,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>$y''(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr>
<tr><td>$y(x)$</td><td>$\cap$</td><td>$\cup\cap$</td><td>$\cup$</td></tr>
</table>
$y_{\text{пер}} = y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3;$
$y''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0; y''(0) = 6 > 0.$</td>
</tr>
<tr>
<td>8</td>
<td><u>Построить график</u>. Для построения графика можно взять несколько дополнительных точек (–3,1), (1, 5).</td>
<td></td>
</tr>
</table>

9	Абсолютным (или глобальным) экстремумом функции называется наибольшее (абсолютный максимум) или наименьшее (абсолютный минимум) значения функции в области. Если функция непрерывна на отрезке [a, b], то она всегда имеет на этом отрезке абсолютный максимум и абсолютный минимум. Абсолютный экстремум может быть или в точках локального экстремума $\in[a, b]$ или в концевых точках отрезка. Если дифференцируемая функция на интервале (a, b) имеет единственную точку локального экстремума, то эта точка будет и точкой абсолютного экстремума функции на (a, b). ***Пример***. $y = x^3 + 3x^2 + 1$ на [–1; 2] $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) = 0;\ \ x_1 = 0, x_2 = -2.$ $x_1 = 0 \in [-1;2],\ \ x_2 = -2 \notin [-1;2]$ $y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3;$ Следовательно: $y(0) = 1$ — абсолютный минимум; $y(0) = 1;$ $y(2) = 21$ — абсолютный максимум $y(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 1 = 21;$ функции на [–1; 2].	 

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ, СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ.

На практике часто приходится иметь дело с переменными величинами, значения которых зависят от значений других переменных, т.е., необходимо рассматривать функции двух или нескольких переменных. Например, в экономических задачах используются производственная функция Кобба-Дугласа $K(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, где x, y – затраты, труда и капитала соответственно, функция полезности $U(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая задаёт полезность для потребителя от приобретения x_1 единиц 1-го блага, x_2 единиц 2-го блага и т.д.

Определение. Переменная величина z называется *функцией двух независимых переменных* x и y: $z = f(x, y)$ (или функцией точки $M(x, y)$: $z = f(M)$), заданной на множестве D, если по некоторому закону каждой паре $(x, y) \in D$ (каждой точке $M \in D$) соответствует определенное значение z.

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде $z = f(x, y)$ или $z = f(M)$, или $z = z(x, y)$. Множество D называется *областью определения* функции $f(x, y)$ и обозначается $D(f)$. Она находится из двух условий:

1) В множество D включаются все точки плоскости OXY, где выражение $f(x, y)$ определено, т. е. имеет смысл.

2) Если функция $f(x, y)$ получена для некоторой физической или иной задачи, то учитывается смысл переменных x и y.

Пример. Найти область определения функции

$$z = \frac{x + y}{\ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)} .$$

Изобразить область графически.

Решение. Выражение, определяющее функцию, имеет смысл при двух условиях:

а) аргумент логарифма должен быть положительным;

б) знаменатель дроби не равен нулю.

Таким образом, область определения функции представляет собой решение системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0, \\ \ln(x^2 + y^2 - 1) \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ x^2 + y^2 - 1 \neq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ x^2 + y^2 \neq 2 \end{cases} .$$

Уравнение $x^2+y^2=1$ определяет окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1. Решением неравенства $x^2+y^2>1$ является множество точек (x,y), расположенных вне круга радиуса 1. Из этого множества нужно исключить точки окружности с центром в начале координат и радиуса $\sqrt{2}$, так как $x^2+y^2\neq 2$.

Область определения функции изображена на рис. 1.

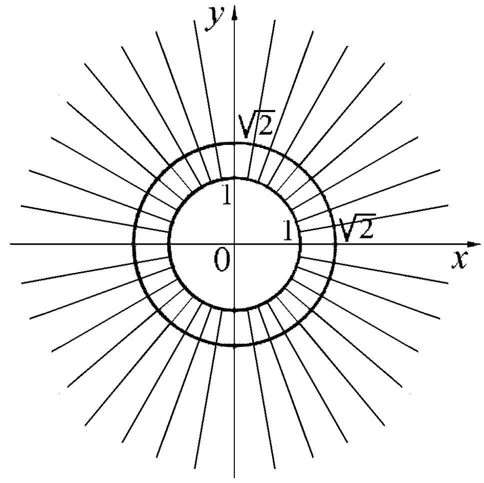


Рис. 1

Распространим определение функции на случай произвольного количества n переменных.

Определение. Пусть E – множества точек n-мерного пространства E_n. Говорят, что переменная W является функцией n переменных $(x_1,x_2,...,x_n)$, заданной на множестве E, если её значения в силу некоторого правила соответствуют точкам множества E. Обозначают $W=f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$ называют также функцией точки n-мерного пространства и обозначают $f(P)$, подразумевая под P точку с координатами $(x_1,x_2,...,x_n)$.

Рассмотрим функцию двух переменных $f(x,y)$ определённую в области D. Каждой точке $P(x,y)\in D$ соответствует определённое значение функции $z=f(P)$. Принимает это значение z за аппликату некоторой точки M в системе координат $OXYZ$. Абсциссу и ординату для этой точки возьмём такими же, как и для точки P (P – проекция точки M на плоскость OXY). Таким образом, каждой точке $P(x,y)\in D$ соответствует вполне определённая точка M в пространстве, а всей области D некоторое множество точек M, образующее вообще говоря, поверхность.

Эта поверхность называется графиком функции $z=f(P)$, а сама функция уравнением этой поверхности.

При изучении поверхностей второго порядка пользуются методом сечений, который заключается в том, что определение вида поверхности по её уравнению производится путём исследования кривых, образованных при пересечении этой поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Этот же метод применим при изучении любой функции 2-х переменных $z = f\left(x, y\right)$, $y = y_0 \Rightarrow z = f(x, y_0)$ - функция одной переменной *x*.

Но можно изучать функцию $z = f\left(x, y\right)$ посредством того же приёма сведения функции 2-х переменных к функции, придавая постоянное значение не одной из независимых переменных, а самой функции. Положим $z = z_0$, тогда уравнение $f\left(x, y\right) = z_0$ даёт зависимость между переменными *x* и *y*, т.е. определяет функцию одной переменной, при которой заданная функция z сохраняет постоянное значение z_0. Геометрически придание постоянного значения z_0 означает пересечение поверхности $z = f\left(x, y\right)$ плоскостью $z=z_0$, параллельной плоскости *OXY*. На плоскости *OXY* уравнение $f\left(x, y\right) = z_0$ - это уравнение проекции *l* линии пересечения *L* поверхности $f\left(x, y\right)$ плоскостью $z = z_0$. При перемещении точки с координатами (*x,y*) вдоль линии *l* функция сохраняет постоянное значение равное z_0.

Определение. *Линией уровня* функции двух переменных $z = f\ (x,\ y)$ называется множество точек плоскости из области определения функции таких, что во всех точках этого множества значение функции одно и то же: $f\left(x, y\right) = C$, $C = \text{const}$. Число *C* называется *уровнем функции*.

Уравнение совокупности линий уровня функции $f\left(x, y\right)$ имеет вид:

$$f\left(x, y\right) = C, \text{ где } C \text{ — постоянная.}$$

Если нужно выделить определенную линию уровня, проходящую через данную точку $M_0\ (x_0,\ y_0)$, то значение постоянной *C* определяем из условия: точка M_0 лежит на линии и, следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению линии: $f(x,y)=C$. Таким образом, уравнение такой линии уровня имеет вид: $f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

В экономических приложениях линии уровня называют кривыми безразличия.

Определение. Совокупность линий уровня, соответствующих различным значениям *z*, называется сетью линий уровня.

Эта сеть, при условии, что она проведена для мало отличающихся друг от друга значений *z*, довольно наглядно характеризует поведение функции.

Пример. Записать уравнение семейства линий уровня функции $z=x^2/4+y^2$. Выделить линию уровня, проходящую через точку M_0 (2, –1) и изобразить ее графически.

Решение. Данная функция определена на всей плоскости, т. е. $D(z)=\mathbb{R}^2$. Уравнение семейства линий уровня имеет вид:

$$\frac{x^2}{4}+y^2=C. \tag{2}$$

При $C<0$ множество решений уравнений пусто, при $C=0$ уравнение определяет точку (0, 0) и при $C>0$ уравнение определяет эллипс. Выделим линию уровня, проходящую через точку M_0 (2, –1). Для этого в уравнение (2) подставим координаты точки M_0:

$$\frac{2^2}{4}+(-1)^2=C \;\Rightarrow\; C=2.$$

Следовательно, при $C=2$ линия уровня проходит через данную точку и её уравнение

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=2.$$

Запишем уравнение эллипса в каноническом виде и построим его:

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1.$$

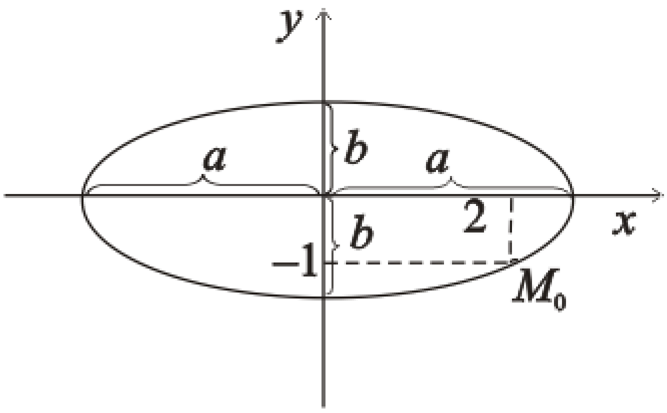


Рис. 2

Центр эллипса в начале координат, полуось по оси Ox $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, полуось по оси Oy $b=\sqrt{2}$ (рис. 2).

Для функции трёх переменных аналогично вводится понятие поверхности уровня.

Определение. Поверхность $z=\varphi(x,y)$ такая, что функция $U=f(x,y,\varphi(x,y))$ равна постоянной величине С, называется поверхностью уровня функции U.

Определение. Число A называют пределом функции $f(P)$ при $P\to P_0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что $|F(P)-A|<\varepsilon$, как только расстояние между P и P_0 будет меньше δ, т.е. $|\overline{PP_0}|<\delta$. Обозначают $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

Определение. Функция $f(P)$, определённая в некоторой точке P_0, называется непрерывной в этой точке, если $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

Определение. Функцию, непрерывную в каждой точке некоторой области, называют непрерывной в этой области.

Определение. Если $f(P)$ не является непрерывной в точке P_0, принадлежащей области определения функции, то говорят, что она имеет разрыв в этой точке, а сама точка P_0 называется точкой разрыва функции.

К числу точек разрыва условимся относить также все точки, не принадлежащие области её задания, но являющиеся граничными точками этой области.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, ИХ ФИЗИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и $M_0(x_0, y_0) \in D$. Дадим аргументу x произвольное приращение Δx и аргументу y — приращение Δy так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$.

Определение. *Полным приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется разность $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$.

Определение. *Частными приращениями* функции $f(x, y)$ по переменным x и y называют соответственно:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \quad y = y_0 = \text{const},$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0), \quad x = x_0 = \text{const}.$$

Определение. *Частными производными* функции $z(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по x и по y называются пределы вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

если они существуют и конечны.

Другие обозначения частных производных функции $z = f(x, y)$:

$$z'_x,\ z'_y \ \text{ или } \ f'_x,\ f'_y, \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Если необходимо, в скобках указывается точка (x_0, y_0), в которой вычислены частные производные:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \ \text{ или } \ z'_x(x_0, y_0) \ \text{ и т. д.}$$

Из определения частных производных следует правило их нахождения: частная производная по x есть обыкновенная производная по x функции $f(x, y)$, вычисленная при условии, что $y = \text{const}$. При этом используются обычные правила и формулы дифференцирования функции одной переменной.

Аналогично, если $u = u(x, y, z)$, то u'_x вычисляют при $y, z = \text{const}$, u'_y — при $x, z = \text{const}$, u'_z при $x, y = \text{const}$.

Пример. Найти частные производные первого порядка от функции по каждому ее аргументу:

$$a)\, z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2}; \quad á)\; z = \sin^2 x \cdot e^{x-y}; \quad â)\; u = \frac{\sqrt{y^2 - 2x}}{\cos 3z}.$$

Решение.

$$a)\, z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2}, \quad z'_x = ? \quad z'_y = ?$$

Функцию z запишем в виде, удобном для дифференцирования:

$$z = x^4 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2} = x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2}.$$

Дифференцируем по x, считая y = const:

$$z'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_x - (xy^{-2})'_x = y^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{9}{2}})'_x - y^{-2}(x)'_x =$$
$$= y^{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} x^{\frac{7}{2}} - y^{-2} = \frac{9}{2}\sqrt{x^7 y} - \frac{1}{y^2}.$$

Дифференцируем по y (x = const):

$$z'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_y - (xy^{-2})'_y = x^{\frac{9}{2}} (y^{\frac{1}{2}})'_y - x(y^{-2})'_y =$$
$$= x^{\frac{9}{2}} \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - x(-2)y^{-3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^9}{y}} + \frac{2x}{y^3}\ .$$

б) $z = \sin^2 x \cdot e^{x-y}$.

Считая $y = \text{const}$. получим:

$$z'_x = (\sin^2 x \cdot e^{x-y})'_x = (\sin^2 x)'_x e^{x-y} + \sin^2 x (e^{x-y})'_x = 2\sin x \cos x e^{x-y} +$$
$$+ \sin^2 x e^{x-y}(x-y)'_x = 2\sin x \cos x \cdot e^{x-y} + \sin^2 x e^{x-y} \cdot 1 = \sin 2x e^{x-y} +$$
$$+ \sin^2 x \cdot e^{x-y}.$$

При вычислении z'_y можно использовать правило $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, так как множитель $\sin^2 x$ — постоянная величина при x= const:

$$z'_y = (\sin^2 x \cdot e^{x-y})'_y = \sin^2 x (e^{x-y})'_y = \sin^2 x \cdot e^{x-y}(x-y)'_y = \sin^2 x \cdot e^{x-y}(-1) =$$
$$= -\sin^2 x \cdot e^{x-y}.$$

в) $u = \dfrac{\sqrt{y^2 - 2x}}{\cos 3z}, \quad u'_x = ? \quad u'_y = ? \quad u'_z = ?$

При дифференцировании по x считаем y, z = const, следовательно, у дроби знаменатель постоянный и используем правило $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$:

$$u'_x = \left(\frac{(y^2-2x)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_x = \frac{\left((y^2-2x)^{\frac{1}{2}}\right)'_x}{\cos 3z} = \frac{\frac{1}{2}(y^2-2x)^{-\frac{1}{2}}(y^2-2x)'_x}{\cos 3z} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(y^2-2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)}{\cos 3z} = -\frac{1}{\cos 3z\sqrt{y^2-2x}} .$$

Аналогично при дифференцировании по y считаем x, z = const:

$$u'_y = \left(\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_y = \frac{\left(\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_y}{\cos 3z} = \frac{\frac{1}{2}\left(y^2-2x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(y^2-2x\right)'_y}{\cos 3z} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(y^2-2x\right)^{-\frac{1}{2}} 2y}{\cos 3z} = \frac{y}{\cos 3z\sqrt{y^2-2x}} .$$

Дифференцируя функцию по z, считаем x, y = const, следовательно, числитель дроби постоянный и можно использовать правило :

$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$. Имеем:

$$u'_z = \left(\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_z = -\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos 3z\right)'_z}{\left(\cos 3z\right)^2} = -\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\sin 3z\right)\cdot 3}{\left(\cos 3z\right)^2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{y^2-2x}\sin 3z}{\left(\cos 3z\right)^2} .$$

С физической точки зрения частные производные характеризуют скорость изменения функции в направлении соответствующих координатных осей.

Геометрический смысл частной производной z'_x состоит в том, что она равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности $z = f\left(x, y\right)$ плоскостью y=const, а производная z'_y - плоскостью x=const.

ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ.

Теорема (о полном приращении функции 2-х переменных). Если функция $z = f\ (x,\ y)$ в окрестности некоторой точки (x,y) имеет частные производные $z'_x(x,y)$ и $z'_y(x,y)$, которые непрерывны в этой точке (x,y), то полное приращение функции Δz можно представить в виде:

$$\Delta z = z'_x(x,y)\Delta x + z'_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (1)$$

где α и $\beta \to 0$, когда Δx и $\Delta y \to 0$.

Определение. Функция $z = f\,(x,\ y)$ называется дифференцируемой в некоторой точке $P(x,y)$, если её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где α и $\beta \to 0$, когда Δx и $\Delta y \to 0$. A и B некоторые постоянные.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции 2-х переменных). Если функция $z = f\,(x,\ y)$ дифференцируема в некоторой точке, то она имеет в этой точке частные производные по x и по y, причём $A = z'_x(x,y), \quad B = z'_y(x,y)$.

Доказательство: Функция $z = f\,(x,\ y)$ дифференцируема, тогда по определению $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$ положим $\Delta y = 0$ и получим частное приращение по переменной x: $\Delta z = A\Delta x + \alpha\Delta x,$ по определению частной производной $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = A.$ Аналогично $\frac{\partial z}{\partial y} = B.$

Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции 2-х переменных). Если функция $z = f\,(x,\ y)$ в окрестности некоторой точки (x,y)

имеет частные производные $z'_x(x,y)$ и $z'_y(x,y)$, которые непрерывны в этой точке (x,y), то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.
Доказательство: Поскольку выполнены условия теоремы о полном приращении функции, то $\Delta z = z'_x(x,y)\Delta x + z'_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$ а по определению это означает, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в некоторой области, если она дифференцируема в каждой её точке.

Определение. Главная часть приращения функции $z = f(x, y)$ линейная относительно приращений независимых переменных называется полным дифференциалом функции:

$$dz = z'_x(x,y)\Delta x + z'_y(x,y)\Delta y,$$

а так как $\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy,$ то

$$dz = z'_x(x,y)dx + z'_y(x,y)dy,$$

при этом выражения $d_x z = z'_x(x,y)dx$ и $d_y z = z'_y(x,y)dy$ называются частными дифференциалами.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = x(t), \quad y = y(t),$ причём $x(t), \quad y(t)$ дифференцируемы по переменной t, а $z = f(x, y)$также дифференцируемая функция. Тогда $z = f(x,y) = f(x(t), y(t)) = F(t)$ - есть сложная функция переменной t, полная производная которой по переменной t находится по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = z'_x \frac{dx}{dt} + z'_y \frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, где $y = y(x).$ Тогда $z = f(x,y) =$ $= f(x, y(x)) = F(x)$ - есть сложная функция переменной x. Этот случай сводится к предыдущему, где роль переменной t играет x, и по формуле (2) получим:

$$\frac{dz}{dx} = z'_x + z'_y \frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

Эта производная называется полной производной функции z , как сложной функции одной переменной x, в отличие от z'_x, которая является частной производной по переменной x функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = x(u,v), \quad y = y(u,v),$ тогда z есть сложная функция переменных u и v. Частные производные этой функции по переменным u и v определяются формулами:

$$z'_u = z'_x x'_u + z'_y y'_u, \quad z'_v = z'_x x'_v + z'_y y'_v. \tag{4}$$

Теорема (инвариантность формы полного дифференциала). Формула для полного дифференциала функции 2-х переменных $z = f(x, y)$ $dz = z'_x(x, y)dx + z'_y(x, y)dy$ сохраняет свой вид независимо от того являются ли x и y независимыми переменными или промежуточными аргументами, т.е. функциями.

Доказательство: Пусть $z = f(x, y)$, где $x = x(u,v), \quad y = y(u,v),$ и все функции дифференцируемы по своим аргументам.
$z = f(x, y) = f(x(u,v), y(u,v)) = F(u,v)$. Тогда по определению полного дифференциала, и используя формулу (4), получим:

$$dz = z'_u du + z'_v dv = (z'_x x'_u + z'_y y'_u)du + (z'_x x'_v + z'_y y'_v)dv =$$
$$z'_x(x'_u du + x'_v dv) + z'_y(y'_u du + y'_v dv) = z'_x dx + z'_y dy.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0,$ где $F(x, y)$ функция 2-х переменных. Если каждому значению $x \in M$ соответствует единственное значение y, которое совместно с x удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0,$ то говорят, что это уравнение определяет на множестве M неявную функцию $y = \varphi(x)$.

Тeореме (существования неявной функции). Если функция $F(x, y)$ и её частные производные $F'_x, \quad F'_y$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$ и при этом $F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y) = 0$ определяет в некоторой окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$

единственную неявную функцию $y = y(x)$, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0.

Перейдём к дифференцированию неявной функции. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, и $F(x, y)$ удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы, следовательно определена функция $y = y(x)$, найдём её производную.

Продифференцируем тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$, учитывая, что y есть сложная функция относительно переменной x, используем формулу (3) и получим:

$$\frac{dF}{dx} = F'_x + F'_y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{5}$$

Пусть $F(x, y, z)$ — функция, определенная на некотором множестве M точек пространства $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) = 0$.

Если каждой точке (x, y) множества $D \subset \mathbb{R}^2$ соответствует единственное значение z такое, что $(x, y, z) \in M$ и выполнено равенство $F(x, y, z) = 0$, то говорят, что на множестве D уравнение $F(x, y, z) = 0$ неявно определяет функцию

$z = z(x, y)$. При этом, если функция $F(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частные производные неявной функции $z = z(x, y)$ также существуют и их можно вычислить по формулам:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{6}$$

Пример. Найти частные производные z'_x и z'_y функции, заданной неявно уравнением $\cos 2z = y^2 - xe^{y/z}$.

Решение. Данное уравнение запишем в виде $F(x, y, z) = 0$:

$$\cos 2z - y^2 + xe^{y/z} = 0.$$

Функция $F(x, y, z)$ определена для любых x и y и $z \neq 0$.

Найдем частные производные функции $F(x,y,z)$:

при y, z = const

$$F'_x = (\cos 2z - y^2 + xe^{y/z})'_x = (\cos 2z)'_x - (y^2)'_x + (xe^{y/z})'_x = e^{y/z}:$$

при x, z = const

$$F'_y = (\cos 2z - y^2 + xe^{y/z})'_y = (\cos 2z)'_y - (y^2)'_y + (xe^{y/z})'_y = -2y + xe^{y/z} \cdot \frac{1}{z} =$$

$$= \frac{-2yz + xe^{y/z}}{z};$$

при x, y = const

$$F'_z = (\cos 2z - y^2 + xe^{y/z})'_z = (\cos 2z)'_z - (y^2)'_z + (xe^{y/z})'_z = -\sin 2z \cdot 2 +$$

$$+xe^{y/z}(-\frac{y}{z^2}) = \frac{-2z^2 \sin 2z - xye^{y/z}}{z^2}.$$

Применяя формулы (6), получим:

$$z'_x = -\frac{e^{y/z} \cdot z^2}{-2z^2 \sin 2z - xye^{y/z}} = \frac{z^2 e^{y/z}}{2z^2 \sin 2z + xye^{y/z}};$$

$$z'_y = -\frac{(-2yz + xe^{y/z}) \cdot z^2}{z(-2z^2 \sin 2z - xye^{y/z})} = \frac{(-2yz + xe^{y/z}) \cdot z}{2z^2 \sin 2z + xye^{y/z}}.$$

СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Определение. Часть пространства (всё пространство), каждой точке P которого соответствует значение некоторой скалярной величины u, называется скалярным полем.

Примерами скалярных полей являются поля распределения температуры, плотности, электрического потенциала.

Будем предполагать, что скалярная величина U не зависит от времени, а зависит только от положения точки P, т.е., u=u(P). Эта функция называется функцией скалярного поля. Если в пространстве ввести систему координат $OXYZ$, то точка P в этой системе будет иметь координаты x, y, z, и скалярная величина u будет функцией координат, т.е., u=F(P)=F(x,y,z). И обратно, каждая функция 3-х переменных u=F(x,y,z) задаёт скалярное поле.

Геометрически скалярное поле часто изображается с помощью поверхностей уровня.

Определение. Поверхностью уровня (эквипотенциальной поверхностью) скалярного поля называется множество точек пространства, в которых функция поля $u=F(x,y,z)$ имеет одно и то же значение C.

Уравнение поверхности уровня имеет вид: $F(x,y,z)=C$. Придавая C различные значения, получим семейство линий уровня.

Наряду со скалярными полями в пространстве различают скалярные поля на плоскости.

Определение. Плоское скалярное поле определяется как часть плоскости (или вся плоскость), каждой точке которой соответствует численное значение скалярной величины z. Функция плоского скалярного поля зависит от двух переменных $z=f(x,y)$.

Плоские скалярные поля изображаются геометрически с помощью линий уровня. Линии уровня определяются как множество точек плоскости, в которых функция скалярного поля сохраняет постоянное значение C. Уравнения линий уровня имеют вид: $f(x,y)=C$.

Пусть задана дифференцируемая функция скалярного поля $u=F(x,y,z)$. Рассмотрим точку P этого поля и луч $\overline{S}$, выходящий из точки P в направлении единичного вектора $\overline{S^0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Пусть $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ какая-либо другая точка этого луча.

Определение. Разность значений функции u скалярного поля в точках P_1 и P называется приращением этой функции в направлении $\overline{S}$ и обозначается $\Delta_S u$. Тогда:

$$\Delta_S u = F(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - F(x,y,z).$$

Обозначим ΔS расстояние между точками P_1 и P.

Определение. Производной функции $u=F(x,y,z)$ в точке P по направлению $\overline{S}$ называется $\frac{\partial u}{\partial S}=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta_S u}{\Delta S}$.

Производная $\frac{\partial u}{\partial S}$ определяет скорость изменения функции в направлении $\overline{S}$.

Получим формулу для вычисления $\frac{\partial u}{\partial S}$.

$$PP_1 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad \Delta x = \Delta S \cos\alpha, \quad \Delta y = \Delta S \cos\beta, \quad \Delta z = \Delta S \cos\gamma.$$

Так как $u=F(x,y,z)$ дифференцируема в точке P, то по теореме о полном приращении функции её полное приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta u(P) = F'_x(P)\Delta x + F'_y(P)\Delta y + F'_z(P)\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z,$$

$\alpha,\ \beta$ и $\gamma \to 0$, когда $\Delta x,\ \Delta y$ и $\Delta z \to 0$.

Рассмотрим приращение функции в направлении $\overline{S}$ $\Delta U = \Delta_S U$:

$$\Delta_S u(P) = F'_x(P)\Delta S\cos\alpha + F'_y(P)\Delta S\cos\beta + F'_z(P)\Delta S\cos\gamma +$$
$$+\alpha\Delta S\cos\alpha + \beta\Delta S\cos\beta + \gamma\Delta S\cos\gamma.$$

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial S}(P) = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta_S u(P)}{\Delta S} = F'_x(P)\cos\alpha + F'_y(P)\cos\beta + F'_z(P)\cos\gamma.$ (7)

Итак, производная функции $u=F(x,y,z)$ по направлению $\overline{S}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial S} = F'_x\cos\alpha + F'_y\cos\beta + F'_z\cos\gamma, \tag{8}$$

где $cos\alpha,\quad \cos\beta,\quad \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\overline{S} = \left(S_x, S_y, S_z\right)$, которые вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}},\ \cos\beta = \frac{S_y}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}},\ \cos\gamma = \frac{S_z}{\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}}. \tag{9}$$

Пример. Вычислить производную функции $u = y^x - z^3$ в точке $M_0(0,\ e,\ -1)$ в направлении вектора $\overline{S} = \left(1,\ 2, -2\right)$.

Решение. Найдем частные производные функции $u = y^x - z^3$:

$$u'_x = \left(y^x - z^3\right)'_x = \left(y^x\right)'_x - \left(z^3\right)'_x = y^x\ln y\cdot x' = y^x\ln y,$$

так как $y = \text{const}$ и функция y^x — показательная относительно x;

$$u'_y = \left(y^x - z^3\right)'_y = \left(y^x\right)'_y - \left(z^3\right)'_y = xy^{x-1},$$

$x,\ z = \text{const}$ и y^x — степенная функция относительно y;

$$u'_z = \left(y^x - z^3\right)'_z = \left(y^x\right)'_z - \left(z^3\right)'_z = -3z^2.$$

Вычислим значения частных производных u'_x, u'_y, u'_z в точке $M_0\left(0,\, e,\, -1\right)$:

$$u'_x\left(M_0\right) = e^0 \ln e = 1,\;\; u'_y\left(M_0\right) = 0 \cdot e^{-1} = 0,\;\; u'_z\left(M_0\right) = -3\left(-1\right)^2 = -3\,.$$

Определим модуль и направляющие косинусы вектора $\bar{S} = \left(1,\, 2,\, -2\right)$ по формулам (9):

$$\left|\bar{S}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + \left(-2\right)^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \cos\beta = \frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma = -\frac{2}{3}\;.$$

Применяя формулу (8), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial s}\left(M_0\right) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + \left(-3\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{6}{3} = \frac{7}{3}\;.$$

Следовательно, функция в точке M_0 в направлении вектора $\bar{S}$ возрастает со скоростью $\frac{7}{3}$ единиц скорости.

Замечание. Если задана функция $z=f(x,y)$ плоского скалярного поля, то её производная в направлении $\overline{S^0} = (\cos\alpha, \cos\beta)$:

$$\frac{\partial z}{\partial S} = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta,$$ а так как $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ и $cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, то

$$\frac{\partial z}{\partial S} = z'_x \cos\alpha + z'_y \sin\alpha.$$

ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Пусть D некоторая область в пространстве $\mathbb{R}^3$. Если в ней задана функция $u = u\ (x, y, z)$, то говорят, что в области D задано *скалярное поле*, а функция $u = u\ (x, y, z)$ называется функцией скалярного поля. Например, u — температура в точках $M \in D$ (поле температур), или u — давление жидкости или газа в точках сосуда D (поле давлений). При изучении скалярного поля важно иметь информацию о скорости изменения величины поля в том или ином направлении. Такую информацию дает производная по направлению.

Наряду с ней рассматривают в каждой точке $M_0 \in D$ вектор с координатами $\left(u'_x\left(M_0\right), u'_y\left(M_0\right), u'_z\left(M_0\right)\right)$, называемый *градиентом* функции $u = u\left(M\right)$ в точке M_0. Вектор градиента обозначается $\operatorname{grad} u\left(M_0\right)$:

$$\operatorname{grad} u\left(M_0\right) = u'_x\left(M_0\right)\overline{i} + u'_y\left(M_0\right)\overline{j} + u'_z\left(M_0\right)\overline{k}, \qquad (10)$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — единичные векторы декартова прямоугольного базиса.

Теорема. Проекция вектора $\operatorname{grad} u$ на направление $\overline{S}$ равна производной функции u по направлению $\overline{S}$, т.е.: $\dfrac{\partial U}{\partial S} = np_S\,(gradu).$

Доказательство:

Согласно формуле (8):

$$\frac{\partial U}{\partial S} = F'_x \cos\alpha + F'_y \cos\beta + F'_z \cos\gamma = (gradu, \overline{S^0}) = np_S\, gradu.$$

Учитывая, что производная по направлению $\dfrac{\partial U}{\partial S}$ определяет скорость изменения функции в этом направлении, можно сказать, что проекция вектора $\operatorname{grad} u$ на вектор $\overline{S}$ равна скорости изменения поля $U=F(x,y,z)$ в направлении вектора $\overline{S}$. Таким образом:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = np_S\,(gradu) = \left|gradu\right|\cos\varphi,$$

где φ - угол между вектором $\operatorname{grad} u$ и вектором $\overline{S}$. Поэтому, если направление вектора $\overline{S}$ и вектора $\operatorname{grad} u$ совпадают, то $\varphi = 0, \quad \cos\varphi = 1,$ и производная по направлению имеет наибольшее значение, равное $\left|gradu\right|$.

Вектор grad u (M_0) указывает направление, в котором функция $u(M)$ в точке M_0 возрастает с максимальной скоростью. Максимальная величина скорости равна:

$$\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right| = \sqrt{\left(u'_x\left(M_0\right)\right)^2 + \left(u'_y\left(M_0\right)\right)^2 + \left(u'_z\left(M_0\right)^2\right)}. \qquad (11)$$

Пример. Найти градиент скалярного поля $u = y^2 z + 3z^2 - 4xyz$ в точке $M_0(3,1,1)$, модуль градиента и объяснить результат с физической точки зрения.

Решение. Найдем частные производные от функции $u(x,y,z)$ и вычислим их в точке M_0:

$$u'_x = \left(y^2 z + 3z^2 - 4xyz\right)'_x = -4yz, \qquad u'_x(M_0) = (-4yz)\big|_{(3,1,1)} = -4,$$

$$u'_y = \left(y^2 z + 3z^2 - 4xyz\right)'_y = 2yz - 4xz, \qquad u'_y(M_0) = (2yz - 4xz)\big|_{(3,1,1)} = -10,$$

$$u'_z = \left(y^2 z + 3z^2 - 4xyz\right)'_z = y^2 + 6z - 4xy, \quad u'_z(M_0) = \left(y^2 + 6z - 4xy\right)\Big|_{(3,1,1)} = -5.$$ П

рименяя формулы (10), (11), получаем:

$$\operatorname{grad} u(M_0) = -4\overline{i} - 10\overline{j} - 5\overline{k},$$

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = \sqrt{141}.$$

Вывод. Заданная функция $u(M)$ в точке M_0 возрастает с максимальной скоростью, равной $\sqrt{141}$, в направлении вектора $\operatorname{grad} u(M_0) = (-4, -10, -5)$.

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Теорема (о плоскости всех касательных). Все касательные, проведённые в точке M_0 к линиям, лежащим на поверхности уровня, расположены в одной плоскости, перпендикулярной к вектору $\operatorname{grad} u(M_0)$, при условии, что $\operatorname{grad} u(M_0) \neq 0$.

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$, левая часть которого является функцией, дифференцируемой в некоторой области. Эта функция $U=F(x,y,z)$ определяет скалярное поле, для которого данная поверхность является одной их поверхностей уровня.

Пусть в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ $\operatorname{grad} u(M_0) \neq 0$. Тогда согласно предыдущей теореме все касательные, проведённые через точку M_0 к линиям, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0, расположены в одной плоскости, перпендикулярной к $\mathrm{grad}\,u\left(M_0\right)$. Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0.

Найдём уравнение этой плоскости. Так как она проходит через точку M_0, то её уравнение имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Вектор нормали $\overline{N}=\left(A,B,C\right)$ перпендикулярен плоскости, а значит в качестве вектора нормали можно использовать вектор $\mathrm{grad}\,u\left(M_0\right)$:

$$\overline{N}=gradu(M_0)=(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0)).$$

Таким образом, уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,y,z)=0$ в точке M_0 (x_0, y_0, z_0) имеет вид:

$$F'_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+F'_y\left(M_0\right)\left(y-y_0\right)+F'_z\left(M_0\right)\left(z-z_0\right)=0\,. \qquad (12)$$

Определение. Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости, называется *нормалью* к поверхности в этой точке.

Вектор $\mathrm{grad}\,u\left(M_0\right)$ можно рассматривать как направляющий вектор нормали, и канонические уравнения нормали будут иметь вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x\left(M_0\right)}=\frac{y-y_0}{F'_y\left(M_0\right)}=\frac{z-z_0}{F'_z\left(M_0\right)}. \qquad (13)$$

Если поверхность задана явно уравнением $z = f\,(x,\ y)$, то уравнения касательной плоскости и нормали будут иметь вид:

$$f'_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+f'_y\left(M_0\right)\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0, \qquad (14)$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x\left(M_0\right)}=\frac{y-y_0}{f'_y\left(M_0\right)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (15)$$

Из формулы (14) получим $z-z_0=f'_x\left(M_0\right)\left(x-x_0\right)+f'_y\left(M_0\right)\left(y-y_0\right)$. Сравнивая с формулой для полного дифференциала функции 2-х переменных $dz=z'_x(x,y)dx+z'_y(x,y)dy$, делаем вывод, что $dz=z-z_0$. Таким образом, геометрический смысл полного дифференциала функции 2-х переменных состоит в том что он равен приращению аппликаты касательной плоскости.

Пример. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2+2y^2+z^2=1$ в точке $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Решение. Поверхность задана неявно уравнением вида $F(x,y,z)=0$ с функцией $F(x,y,z)=3x^2+2y^2+z^2-1.$

Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ и вычислим их значения в точке M_0:

$$F'_x=\left(3x^2+2y^2+z^2-1\right)'_x=6x, \qquad F'_x(M_0)=6\frac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{6};$$

$$F'_y=\left(3x^2+2y^2+z^2-1\right)'_y=4y, \qquad F'_y(M_0)=4\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3};$$

$$F'_z=\left(3x^2+2y^2+z^2-1\right)'_z=2z, \qquad F'_z(M_0)=2\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Используя (12), получаем уравнение касательной плоскости в виде:

$$\sqrt{6}\left(x-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(y-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\frac{\sqrt{6}}{3}\left(z-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=0,$$

что после упрощения дает:

$$3x+2y+z-\sqrt{6}=0.$$

Уравнение нормали к поверхности, согласно (13), имеет вид:

$$\frac{x-\frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{6}}=\frac{y-\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{2\sqrt{6}}{3}}=\frac{z-\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Определение. *Частными производными второго порядка* функции нескольких переменных называются частные производные от частных производных первого порядка. Обозначается, например, для функции двух переменных:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \; z''_{xy} = (z'_x)'_y \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \; z''_{yy} = (z'_y)'_y \text{ или } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Определение. Частной производной n-го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной (n-1)-го порядка.

Определение. Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется смешанной частной производной.

Теорема. Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся только порядком дифференцирования, равны между собой при условии, что они являются непрерывными.

Пример. Найти частные производные $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}$ функции $z = \left(x^2 + y^2\right)\ln 2x$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = ((x^2 + y^2)\ln 2x)'_x = (x^2 + y^2)'_x \ln 2x + (x^2 + y^2)(\ln 2x)'_x =$$

$$= 2x\ln 2x + (x^2 + y^2)\frac{2}{2x} = 2x\ln 2x + x + \frac{y^2}{x} = 2x\ln 2x + x + y^2 x^{-1};$$

$$z'_y = ((x^2 + y^2)\ln 2x)'_x = \ln 2x(x^2 + y^2)'_y = \ln 2x 2y = 2y\ln 2x.$$

Частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (2x\ln 2x + x + y^2x^{-1})'_x = (2x)'_x \ln 2x + 2x(\ln 2x)'_x + \left(x\right)'_x +$$

$$+(y^2x^{-1})'_x = 2\ln 2x + 2x\frac{2}{2x} + 1 + y^2(-1x^{-2}) = 2\ln 2x + 3 - \frac{y^2}{x^2};$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (2x\ln 2x + x + y^2x^{-1})'_y = (2x\ln 2x)'_y + (x)'_y + (y^2x^{-1})'_y = 2yx^{-1} = \frac{2y}{x};$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = (2y\ln 2x)'_x = 2y(\ln 2x)'_x = 2y\frac{2}{2x} = \frac{2y}{x};$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (2y\ln 2x)'_y = 2\ln 2x(y)'_y = 2\ln 2x.$$

Действительно, смешанные частные производные z''_{xy} и z''_{yx} оказались равными друг другу при $x \neq 0$.

Определение. Полным дифференциалом второго порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала первого порядка, т.е. $d(dz) = d^2 z.$

Найдём выражение для полного дифференциала второго порядка функции двух переменных, при условии, что x и y являются независимыми переменными:

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим точку $X^0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, где $X^0 \in R_n$.

Определение. $\delta-$ окрестностью точки X^0 называется множество точек X, для которых расстояние от точки X^0 меньше δ, т.е. $\left|X^0 X\right| < \delta.$ Обозначается $U_\delta\left(X^0\right).$

Определение. $\delta-$ окрестностью точки X^0 называется $\delta-$ окрестность точки X^0, из которой удалена точка X^0. Обозначается $\dot{U}_\delta\left(X^0\right).$

Определение. Точка X^0 называется точкой максимума (минимума) функции $u(X)$, если существует такая $\delta-$ окрестностью точки X^0, что для всех $X \in \dot{U}_\delta\left(X^0\right)$ выполняется $u(X) < u\left(X^0\right)$ $\left(u(X) > u\left(X^0\right)\right).$

Теорема (необходимое условие экстремума). Если функция $u(X)$ имеет экстремум в точке X^0, и в этой точке существуют все частные производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(X^0\right) \quad (i=1,2,...,n)$, то они равны нулю.

Доказательство:

Пусть X^0 – точка максимума, тогда по определению для всех точек $X \in \dot{U}_\delta\left(X^0\right)$ $u\left(X\right) < u\left(X^0\right)$. Рассмотрим точку $X^*(x_1^0+\Delta x, x_2^0, ..., x_n^0) \in \dot{U}_\delta$, тогда $u\left(X^*\right) < u\left(X^0\right)$ - определение экстремума функции одной переменной x_1, а его необходимое условие $\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(X^0\right)=0.$ Аналогично доказывается, что все остальные частные производные равны нулю.

Определение. Точки, в которых все частные производные 1-го порядка функции $u(X)$ обращаются в нуль, называются стационарными точками.

Обращение в нуль частных производных не достаточное условие, оно позволяет только выявить точки, подозрительные на экстремум, для этого нужно найти решение системы уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=0, \quad ..., \quad \frac{\partial u}{\partial x_n}=0.$$

Определение. Матрицей Гессе для функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется матрица n-го порядка, составленная из частных производных второго порядка функции u по всем её аргументам:

$$H_x=\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица Гессе является симметрической. Введём представление о положительно и отрицательно определённых матрицах.

Определение. Симметрическая матрица A n-го порядка называется положительно определённой (отрицательно определённой), если для всех $X \in R_n$ выполняется $(AX, X) > 0 \quad ((AX, X) < 0)$.

Теорема (критерий Сильвестра). Для того чтобы симметрическая матрица A n-го порядка была положительно определённой необходимо и достаточно, чтобы все её угловые миноры, выходящие из левого верхнего угла, были положительны, т.е.: $a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots$. Для того чтобы симметрическая матрица A n-го порядка была отрицательно определённой необходимо и достаточно, чтобы знаки её угловых миноров чередовались, начиная со знака минус, т.е.:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad \ldots.$$

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть M_0 – стационарная точка дифференцируемой функции $u = f(M)$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$. Если матрица Гессе H_x в точке M_0 положительно определена, то M_0 - точка локального минимума функции $u = f(M)$. Если матрица Гессе H_x в точке M_0 отрицательно определена, то M_0 - точка локального максимума функции $u = f(M)$.

Если матрица Гессе H_x в точке M_0 не является ни положительно определённой ни отрицательно определённой, то в точке M_0 экстремум может быть, а может и не быть, нужны дополнительные исследования. Однако, если минор второго порядка $\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} < 0,$ то в точке M_0 экстремума нет.

Пример. Исследовать на экстремум функцию
$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 6x_2 - 2x_3.$

Решение. Область определения функции $(x_1, x_2, x_3) \in R_3$.
Найдём частные производные первого порядка по всем переменным:
$f'_{x_1} = 2x_1 - 4, \quad f'_{x_2} = 2x_2 + 6, \quad f'_{x_3} = 2x_3 - 2$ и для нахождения точки, подозрительной на экстремум, приравняем их к нулю:
$2x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad 2x_2 + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -3, \quad 2x_3 - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = 1$.
Получили точку $M_0(2,-3,1)$. Проверим достаточное условие экстремума, для этого найдём все частные производные второго порядка:
$f''_{x_1x_1} = 2, \quad f''_{x_1x_2} = f''_{x_2x_1} = 0, \; f''_{x_1x_3} = f''_{x_3x_1} = 0, \; f''_{x_2x_2} = 2, \quad f''_{x_2x_3} = f''_{x_3x_2} = 0,$
$f''_{x_3x_3} = 2.$
Таким образом, матрица Гессе H_x в точке M_0:

$$H_x\left(M_0\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдём её угловые миноры:

$2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \quad \Rightarrow$ матрица Гессе H_x в точке M_0

положительно определена и M_0 – точка минимума. Найдём значение функции u в точке минимума: $u_{\min} = u\left(M_0\right) = 4 + 9 + 1 - 8 - 18 + 2 = -12.$

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Переформулируем необходимое и достаточное условия экстремума для случая функции двух переменных. Пусть функция $z = Z\left(x, y\right)$ определена в некоторой области D и $M_0\left(x_0, y_0\right)$— внутренняя точка области.

Необходимое условие экстремума дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $\left(x_0, y_0\right)$ — точка экстремума дифференцируемой функции $z = Z\left(x, y\right)$. Тогда частные производные

$$Z'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ и } Z'_y(x_0, y_0) = 0. \qquad (16)$$

Другими словами, $\operatorname{grad} Z(M_0) = \overline{0}$.

Экстремум функции возможен не только в её стационарных точках, но и в таких точках, в которых $\operatorname{grad} Z$ не существует, т. е. не существует хотя бы одна из частных производных Z'_x или Z'_y. Такие точки вместе со стационарными называются *критическими* точками функции.

Не любая критическая точка функции является точкой экстремума. Следующая теорема устанавливает достаточные условия экстремума функции в стационарной точке.

Теорема. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $Z(x, y)$, т. е. $Z'_x(M_0) = 0$ и $Z'_y(M_0) = 0$, и в некоторой окрестности этой точки все частные производные второго порядка функции $Z(x, y)$ непрерывны.

Обозначим:

$$A = Z''_{xx}(M_0),\ B = Z''_{xy}(M_0),\ C = Z''_{yy}(M_0),\ \Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \qquad (17)$$

Тогда:

1) если $\Delta(M_0) > 0$, то в точке M_0 функция имеет экстремум: минимум, если $A > 0$, и максимум, если $A < 0$;

2) если $\Delta(M_0) < 0$, то в точке M_0 функция не имеет экстремума;

3) если $\Delta(M_0) = 0$, то вопрос о наличии экстремума требует дополнительного исследования (назовем случай $\Delta = 0$ неопределенным).

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум:

1) найти область определения функции;

2) определить критические точки функции в ее области определения, т. е. точки, в которых частные производные Z'_x и Z'_y равны нулю или не существуют;

3) определить частные производные второго порядка;

4) проверить выполнение достаточных условий экстремума (17) для каждой стационарной точки;

5) вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - x^2y - xy^2$.

Решение. Исследование функции $Z(x, y)$ на экстремум проводим согласно вышеуказанному алгоритму.

1. Область определения функции $z = 2xy - x^2y - xy^2$ — вся плоскость OXY.

2. $z'_x = \left(2xy - x^2y - xy^2\right)'_x = 2y - 2xy - y^2$;

$z'_y = \left(2xy - x^2y - xy^2\right)'_y = 2x - x^2 - 2xy$.

Обе частные производные определены для любых (x, y). Следовательно, точками, подозрительными на экстремум, могут быть только стационарные точки. Определим их из условий $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} z'_x = 2y - 2xy - y^2 = 0, \\ z'_y = 2x - x^2 - 2xy = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y(2 - 2x - y) = 0, \\ x(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим координаты стационарных точек:

$M_0\,(0, 0)$; $M_1\,(0, 2)$; $M_2\,(2, 0)$; $M_3\,(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

3. $z''_{xx} = (2y - 2xy - y^2)'_x = -2y, \quad z''_{xy} = (2y - 2xy - y^2)'_y = 2 - 2x - 2y,$

$z''_{yx} = (2x - x^2 - 2xy)'_x = 2 - 2x - 2y, \quad z''_{yy} = (2x - x^2 - 2xy)'_y = -2x.$

4. Точка $M_0\,(0, 0)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_0} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_0} = 2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_0} = 0,$$

$$\Delta(M_0) = AC - B^2 = 0 - 2^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, в точке $M_0(0, 0)$ данная функция экстремума не имеет.

Точка $M_1(0, 2)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_1} = -4,\ B = z''_{xy} = (2-2x-2y)_{M_1} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_1} = 0,$$

$$\Delta(M_1) = AC - B^2 = -4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0.$$

В точке $M_1(0, 2)$ функция экстремума не имеет.

Точка $M_2(2, 0)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_2} = 0,\ B = z''_{xy} = (2-2x-2y)_{M_2} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_2} = -4,$$

$$\Delta(M_2) = AC - B^2 = 0 \cdot (-4) - (-2)^2 = -4 < 0.$$

В точке $M_2(2, 0)$ экстремума нет.

Точка $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$:

$$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_3} = -\frac{4}{3},\ B = z''_{xy} = (2-2x-2y)_{M_3} = -\frac{2}{3},\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_3} = -\frac{4}{3},$$

$$\Delta(M_3) = AC - B^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} > 0.$$

В точке M_3 функция имеет экстремум, так как $A = -\frac{4}{3} < 0$, то $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ — точка максимума функции.

5. $z_{\max} = z\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть задана функция $z = f(x, y).$ Требуется найти экстремум функции при условии, что x и y связаны соотношением $\varphi(x, y) = 0.$

Определение. Условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны соотношением $\varphi(x, y) = 0,$ которое называется уравнением связи.

Определение. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется точкой условного максимума (минимума) функции $z = f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y) = 0,$ если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x,y)$, принадлежащих этой окрестности и удовлетворяющих уравнению связи, выполняется $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ $\left(f(x_0, y_0) < f(x, y)\right)$.

Уравнение $\varphi(x, y) = 0$ на плоскости определяет некоторую линию L. При отыскании точки условного экстремума значения функции в точке P_0 сравниваются со значениями функции во всех точках P из окрестности точки P_0, расположенных на линии L.

Если уравнение $\varphi(x, y) = 0$ можно разрешить относительно y, т.е. выразить y как явную функцию х $y = \psi(x)$, то подставляя это выражение в функцию z, получим $z = f\left(x, \psi(x)\right) = F(x)$. Решая задачу на экстремум функции одной переменной, найдём точку экстремума x_0, $y_0 = \psi(x_0)$, а затем $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Если уравнение $\varphi(x, y) = 0$ не разрешимо относительно у, но неявно задаёт функцию $y = f(x)$, тогда z является сложной функцией х $z = f\left(x, y(x)\right)$, и её производная определяется по формуле (3):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{18}$$

Производная $\frac{dy}{dx}$ как производная неявно заданной функции определяется формулой (5):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\cdot$ Приравнивая производную функции z к нулю и учитывая уравнение связи, получим необходимое условие экстремума в виде системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f'_x + f'_y\left(-\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

О характере экстремума в полученных точках судят исходя из физического смысла задачи.

Преобразуем систему (20):

$$f'_x = f'_y \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}, \quad \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = -\lambda,$$

где $\lambda -$ неизвестная постоянная, называемая множителем Лагранжа.

Систему (20) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

Введём в рассмотрение функцию Лагранжа:

$$\Phi(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \qquad (22)$$

Тогда система уравнений (21) является необходимым условием экстремума функции $\Phi(x, y)$. Сформулируем правило исследования функции $z = f(x, y)$ на условный экстремум.

Правило (метод неопределённых множителей Лагранжа). Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y) = 0$, составляем функцию Лагранжа (22) и исследуем её на обычный экстремум с учётом уравнения связи.

Обобщим задачу на условный экстремум на случай функции n переменных. Пусть задана функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Требуется найти её экстремум при уравнениях связи $\varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ . . . ,$ $\varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$ при этом $m<n$. Функция Лагранжа принимает вид:

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_m\varphi_m.$$

А система уравнений для отыскания условного экстремума содержит (m+n) уравнений с (m+n) неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}=0, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}=0, \quad \dots \quad ,\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_n}=0, \\ \varphi_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_m(x_1,x_2,\dots,x_n)=0. \end{cases} \tag{23}$$

Пример. Из листа железа площадью S=40 см^2 нужно изготовить закрытую коробку в форме прямоугольного параллелепипеда, имеющую наибольший объём.

Решение. Обозначим размеры коробки x, y, z, тогда её объём $V=xyz$, а площадь полной поверхности $S=2xy+2xz+2yz=40$. Итак, получаем задачу на условный экстремум функции $f=xyz$ при уравнении связи $xy+xz+yz-20=0$. Функция Лагранжа имеет вид:

$$\Phi(x,y,z)=xyz+\lambda(xy+xz+yz).$$

Система уравнений для отыскания экстремума (23):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=yz+\lambda(y+z)=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=xz+\lambda(x+z)=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}=xy+\lambda(x+y)=0, \\ xy+xz+yz-20=0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим $x=y=z=-\lambda=\sqrt{\dfrac{20}{3}}$. Таким образом, наибольший объём при заданной полной поверхности имеет куб со стороной $\sqrt{\dfrac{20}{3}}$ см.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разнообразные проблемы экономики, организации транспортных перевозок и других видов хозяйственного планирования часто ставятся в форме задач оптимизации, т.е. задач поиска экстремума (минимума или максимума) некоторой функции (называемой целевой) при наличии каких-либо дополнительных ограничений. Если целевая функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ является линейной по переменным $x_1, x_2, ... x_n$, а ограничения задаются в виде системы равенств или неравенств, линейных относительно этих переменных, то соответствующая задача оптимизации (программирования) называется *линейной.*

К задачам линейного программирования (ЛП) приводят, в частности, проблемы эффективного использования ограниченных ресурсов сырья или мощностей оборудования. Рассмотрим для примера построение математической модели следующей экономической задачи.

Задача. Нефтеперерабатывающий завод производит за месяц 1500 т алкилата, 1200 т крекинг бензина и 1300 т изопентона. В результате смешивания этих компонентов в пропорциях 1:1:1 и 3:1:2 получается бензин сорта **А** и **Б** соответственно. Стоимость 1 т бензина сортов **А** и **Б** соответственно равна $9 \cdot 10^3$ $p.$и $12 \cdot 10^3$ $p.$ Определить месячный план производства бензина сорта **А** и **Б**, максимизирующий стоимость выпущенной продукции.

Сформулируем эту задачу математически. Пусть x_1 и x_2 – месячный объем производства (в тоннах) бензина сортов **А** и **Б** соответственно. Тогда стоимость (в тыс. р.) месячного производства бензина обоих сортов определяется целевой функцией

$$f(x_1, x_2) = 9x_1 + 12x_2 .$$

(А)

Если в какую-либо смесь объема X составляющие компоненты входят в пропорции $m : n : k$, то объемы этих компонентов равны

$$\frac{m}{p}\text{X},\ \frac{n}{p}\text{X},\ \frac{k}{p}\text{X} \qquad (p = m + n + k).$$

С учетом этого замечания, а также принимая во внимание, что для получения x_1 тонны бензина сорта **А** и x_2 тонны бензина сорта **Б** расходуется не более чем 1500, 1200 и 1300 тонн соответствующих компонентов, заключаем, что должны выполняться следующие ограничения:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{3}{6}x_2 \le 1500,$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 \le 1200,$$

(Б)

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{6}x_2 \le 1300.$$

Кроме того, по физическому смыслу

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

(В)

Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти значения x_1 и x_2, удовлетворяющие ограничениям (Б)–(В) и максимизирующие функцию $f(x_1, x_2) = 9x_1 + 12x_2$. Это типичная задача линейного программирования. Найденная линейная целевая функция (А) совместно с системой ограничений (Б)–(В) образуют *математическую модель* рассмотренной задачи.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЛП)

Общая задача ЛП формулируется следующим образом: найти оптимум (максимум или минимум) линейной целевой функции $f(x)$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$$

(2.1)

переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ при следующих линейных ограничениях:

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \; i = 1, ..., m_1,$$

(2.2)

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i, \; i = m_1 + 1, ..., m_2,$$

(2.3)

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \ge b_i, \; i = m_2 + 1, ..., m,$$

(2.4)

$$x_j \ge 0, \;\; j = 1, ..., n_1 (n_1 \le n).$$

(2.5)

Здесь $c_j, b_j, a_{ij} (i = 1, ..., m; \;\; j = 1, ..., n)$ – заданные постоянные.

Стандартная задача ЛП состоит в определении максимума функции (2.1) при ограничениях-неравенствах (2.2) и условиях (2.5), т.е. имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \;\; i = 1, ..., m, \\ x_j \ge 0, \;\; j = 1, ..., n. \end{array}\right\}$$

(2.6)

Каноническая (или основная) задача ЛП состоит в определении максимума функции (2.1) при ограничениях-равенствах (2.3) и условиях (2.5):

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,\\&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i=1,\dots,m,\\&x_j \ge 0,\ \ j=1,\dots,n.\end{aligned}\right\}$$

(2.7)

Задачу ЛП можно записать более компактно, если ввести обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\dots\dots\ a_{1n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}\dots\dots\ a_{mn}\end{pmatrix}$$

– матрица ограничений размерности $(m \times n)$, $b=(b_1,b_2,\dots,b_m)^T$ – вектор-столбец свободных членов, $c=(c_1,c_2,\dots,c_n)$ – вектор-строка коэффициентов целевой функции, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – n-мерный вектор пространства R_n, который в одних случаях рассматриваем как вектор-строку, а в других (опуская знак транспонирования) – как вектор-столбец.

Тогда стандартная задача (2.6) и каноническая задача (2.7) принимают соответственно вид:

$$\left.\begin{aligned}&(c,x)\to\max,\\&A\cdot x\le b,\\&x\ge 0,\end{aligned}\right\}$$

(2.8)

$$\left.\begin{aligned}&(c,x)\to\max,\\&A\cdot x = b,\\&x\ge 0.\end{aligned}\right\}$$

(2.9)

Здесь (c,x) – скалярное произведение векторов c и x, т.е.

$$(c,x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ ,$$

$A \cdot x$ – произведение матрицы A на вектор-столбец x.

Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий ограничениям (2.2) –(2.5), называется *допустимым решением* (или *планом*). Множество всех допустимых планов задачи ЛП обозначим через R.

Допустимый план $x^* \in R$, доставляющий экстремум целевой функции, называется *оптимальным планом* (*решением*) задачи ЛП. Множество всех оптимальных планов обозначим через R^*.

Если множества R и R^* не пустые $(R \neq \varnothing, R^* \neq \varnothing)$, то задача ЛП разрешима, в противном случае говорят о неразрешимости этой задачи.

Различают два типа неразрешимости: НР1 – целевая функция не ограничена на непустом множестве R; НР2 – множество допустимых планов пусто ($R = \varnothing$).

Любую задачу ЛП можно свести как к стандартной, так и к канонической формам, используя следующие правила:

1) Чтобы перейти от минимизации к максимизации целевой функции $f(x)$, следует умножить целевую функцию на (–1) и использовать равенство

$$\min f(x) = -\max(-f(x)),$$

т.е. задача

$$f(x) = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \to \min$$

соответствует задаче

$$-f(x) = -c_1 x_1 - ... - c_n x_n \to \max .$$

2) Чтобы изменить ограничение-неравенство на неравенство противоположного смысла следует умножить обе части неравенства на (–1):

$$a_{i1} x_1 + ... a_{in} x_n \geq b_i \Leftrightarrow -a_{i1} x_1 - ... - a_{in} x_n \leq -b_i .$$

3) Чтобы перейти от ограничения-неравенства к равенству, нужно

ввести дополнительную (*слабую*) переменную V_i:

$$a_{i1}x_1 + .. + a_{in}x_n \le b_i \Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + V_i = b_i, \\ V_i \ge 0; \end{cases}$$

$$a_{i1}x_1 + .. + a_{in}x_n \ge b_i \Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n - V_i = b_i, \\ V_i \ge 0. \end{cases}$$

4) Чтобы перейти от ограничения-равенства к неравенству, следует заменить равенство на два противоположных неравенства:

$$a_{i1}x_1 + .. + a_{in}x_n = b_i \Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \\ -a_{i1}x_1 - ... - a_{in}x_n \le -b_i. \end{cases}$$

Пример. Привести к каноническому виду задачу ЛП:

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Перейдём к задаче на максимум:

$$-f(x) = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max.$$

Введём дополнительные переменные V_1 и V_3 ($V_1 = x_4$, $V_3 = x_5$), заменив ограничения-неравенства на равенства:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1, \\ x_j \ge 0 \ (j = 1,2,3,4,5). \end{cases}$$

В результате получили следующую задачу ЛП, записанную в канонической форме:

$$-f(x) = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 1, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1,2,...,5). \end{cases}$$

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ ЛП

Геометрический метод применяется для решения задач ЛП с двумя или тремя переменными, записанных в стандартной форме. Рассмотрим, например,

двумерную задачу ЛП:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \ \ (i = 1,..., m) \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Метод решения основан на том, что каждое ограничение $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad (i = 1,\ldots,m)$, а также $x_j \ge 0 \ (j = 1,2)$ геометрически определяет на плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость и, следовательно, множество всех допустимых планов R является пересечением этих полуплоскостей. Множество R есть выпуклое множество. Оно может быть пустым, если система ограничений несовместна, или выпуклым многоугольным множеством. Сторонами этого многоугольника являются прямые $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i = 1,\ldots,m)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Теорема 1*. Если задача ЛП имеет оптимальный план, то целевая функция принимает максимальное значение в некоторой вершине многоугольника R. Если целевая функция принимает максимальное значение более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке множества, являющегося выпуклой линейной оболочкой этих вершин*.

Чтобы решить задачу геометрически, необходимо:

1) построить множество допустимых планов R, определяемое системой ограничений;

2) на множестве R найти оптимальное решение – вершину многоуголь-

ника, если решение единственно, или целый отрезок – сторону многоугольника, если задача ЛП имеет бесконечное множество оптимальных решений.

Применим изложенный метод к решению следующей задачи:

$$f(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \max, \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Решение. Построим для этой задачи множество допустимых планов R. Для этого проведём ограничительные прямые: (1) $-x_1 + 3x_2 = 9$, (2) $2x_1 + 3x_2 = 18$, (3) $2x_1 - x_2 = 10$ и штриховкой отметим те полуплоскости, которые определяются неравенствами (3.2). Заметим, что построение прямой $Ax_1 + Bx_2 + C = 0$ $(C \ne 0)$ значительно упрощается, если предварительно уравнение прямой привести к специальному виду (в отрезках на осях)

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1.$$

Здесь числа $a = -c/A,\; b = -c/B$ – величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях Ox_1, Ox_2. В этой связи уравнения прямых (1), (2) и (3) перепишем в виде:

(1) $\dfrac{x_1}{(-9)} + \dfrac{x_2}{3} = 1,$ (2) $\dfrac{x_1}{9} + \dfrac{x_2}{6} = 1,$ (3) $\dfrac{x_1}{5} + \dfrac{x_2}{(-10)} = 1.$

Отсюда находим отрезки, отсекаемые прямыми (1), (2) и (3) на координатных осях Ox_1, Ox_2.

Чтобы пометить штриховкой полуплоскость, определяемую, например, неравенством $x_1 + 3x_2 \le 9$, возьмем точку $(0;0)$, не лежащую на прямой (1), и, подставив её координаты в неравенство, поучим $0 \le 9$. Неравенство выполняется, следовательно, точка $(0;0)$ принадлежит полуплоскости, определяемой неравенством $x_1 + 3x_2 \le 9$; эту полуплоскость отмечаем штриховкой (рис.1). Аналогично отмечаем штриховкой соответствующие полуплоскости, определяемые неравенствами $2x_1 + 3x_2 \le 18$ и $2x_1 - x_2 \le 10$.

Неравенство $x_1 \ge 0$ определяет правую, а неравенство $x_2 \ge 0$ – верхнюю полуплоскость плоскости (x_1, x_2). Таким образом, множество допустимых планов R есть пятиугольник $OABCD$ (рис. 1).

Найдём теперь в пятиугольнике $OABCD$ вершину, в которой целевая функция $f(x) = 4x_1 + 2x_2$ принимает максимальное значение. С этой целью рассмотрим множество точек, в которых функция $f(x)$ постоянна. Это множество образует прямую, которая называется *линией уровня* целевой функции.

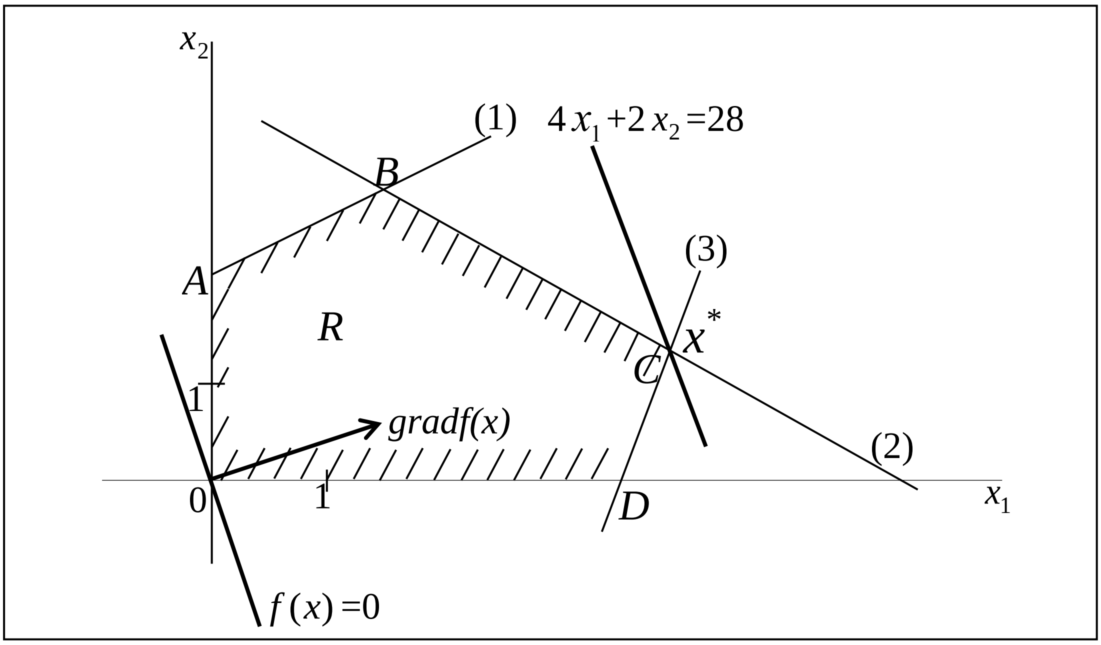


Рис. 1

Её уравнение имеет вид:

$$4x_1 + 2x_2 = const.$$

Придавая $const$ различные значения, получим семейство параллельных прямых. Выберем теперь из этого семейства прямую, которая имеет хотя бы одну общую точку с множеством R и значение $const$ при этом наибольшее. Для этого построим одну из линий уровня, имеющую общие точки с R, например, прямую

$$4x_1 + 2x_2 = 0,$$

и будем перемещать её параллельно самой себе в направлении вектора $c = gradf(x) = (\partial f / \partial x_1; \partial f / \partial x_2) = (4;2)$, поскольку известно, что именно в

этом направлении скорость возрастания функции $f(x)$ будет наибольшей. Перемещаем прямую параллельно самой себе до такого предельного положения, при котором множество R окажется по одну сторону от полученной предельной прямой и хотя бы одна точка из R всё ещё будет принадлежать этой прямой. Построенную таким образом предельную прямую назовём *опорной* для множества R. Точки $x^* \in R$, лежащие на этой опорной прямой, образуют множество R^* оптимальных решений задачи ЛП. Из рис.1 видно, что опорной прямой является линия уровня, проходящая через вершину C и, следовательно, оптимальным решением будет точка $C(x_1^*; x_2^*)$. Поскольку эта точка находится на пересечении ограничительных прямых (2) и (3), то её координаты определяются следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 18, \\ 2x_1 - x_2 &= 10. \end{aligned}\right\}$$

Решая систему, получаем решение $x_1^* = 6, x_2^* = 2$, т.е. $x^*(6;2)$ – оптимальный план задачи (3.1) – (3.2).

Далее находим максимальное значение функции $f(x)$ в точке x^*:

$$f_{\max} = f(x^*) = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 2 = 28.$$

Отметим, что в случае решения задачи на минимум целевой функции $f(x)$ на множестве допустимых планов R, линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ следует перемещать в направлении, противоположном вектору $gradf(x)$.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛП (СИМПЛЕКС-МЕТОД)

Для случая, когда число переменных более трёх, геометрический метод решения задачи ЛП становится невозможным, и тогда применяют аналитические методы. К числу таких методов относится так называемый *симплекс-метод*. Изложим суть симплекс-метода.

Пусть требуется решить задачу ЛП, записанную в канонической форме:

$$\begin{cases} f(x) = (c, x) \to \max, \\ A \cdot x = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Систему линейных уравнений $A \cdot x = b$ можно записать в виде:

$$x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + ... + x_n A_n = b,$$

(4.1)

где $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ ... \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, ... , $A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ – столбцы матрицы A системы ограничений, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$ – столбец свободных членов системы.

Пусть ранг матрицы A равен m, тогда m столбцов матрицы A линейно независимы. *Базисным решением* системы линейных уравнений (4.1) называется решение, ненулевым компонентам которого соответствуют линейно независимые столбцы матрицы A. Если базисное решение удовлетворяет условию неотрицательности, то оно называется *опорным*. Опорное решение называется *невырожденным*, если оно содержит ровно m положительных компонент, и называется *вырожденным* в противном случае.

Пусть множество R допустимых планов задачи (2.9) непусто $(R \neq \varnothing)$ и задано в виде системы (4.1). Точка $x \in R$ является вершиной многоугольника тогда и только тогда, когда $x = (x_1,..., x_n)$ – опорное решение (план) системы $Ax = b$. Идея симплекс-метода и состоит в последовательном целенаправленном продвижении по опорным планам задачи ЛП, когда каждый последующий опорный план не хуже предыдущего, т.е. $f(x_{i+1}) \geq f(x_i)$, вплоть до получения оптимального плана (или выяснения неразрешимости задачи). При этом используются следующие теоремы.

Теорема 2 (*признак оптимальности опорного плана*). *Опорный план* $x = (x_1, x_2,..., x_m, 0, 0,..., 0)$ *является оптимальным планом задачи (2.9), если относительные оценки*

$$\Delta_j = c_\sigma \cdot A_j - c_j = 0 \quad (j = 1,\ldots,n).$$

(4.2)

При этом Δ_j называют *относительной оценкой погрешности* переменной x_j; c_σ – вектор коэффициентов целевой функции $f(x)$ при базисных переменных $x_1, x_2,..., x_m$, т.е. $c_\sigma = (c_1, c_2,..., c_m)$;

A_j – столбец матрицы ограничений A при переменной x_j;

c_j – коэффициент при переменной x_j в целевой функции.

Теорема 3 *(признак неограниченности целевой функции)*. *Если* $\Delta_k < 0$ *для некоторого номера* k $(k \leq n)$ *и среди чисел* a_{ik} $(i = 1,..., m)$ *– элементов столбца* A_k *– нет положительных (т.е. все* $a_{ik} \leq 0$*), то целевая функция задачи (2.9) не ограничена на множестве* R *её допустимых планов.*

Теорема 4 *(о возможности улучшения опорного плана). Если опорный план* x *задачи (2.9) невырожден и некоторое* $\Delta_k < 0$, *но среди чисел* a_{ik} *есть положительные (т.е. не все* $a_{ik} \le 0$*), то существует опорный план* x^1 *такой, что* $f(x^1) > f(x)$.

Переход от одного опорного плана x к новому опорному плану x^1 осуществляется исключением из числа базисных переменных $x_1,..., x_m$ одной из этих переменных и введением в число базисных одной из небазисных
переменных $x_{m+1},..., x_n$ по следующей схеме (схема 1):

1) выбирают разрешающий столбец A_k, соответствующий отрицательному значению $\Delta_k < 0,\ \ k = m+1,...,n$; переменная x_k будет включена в число базисных переменных;

2) выбирают разрешающую строку, соответствующую наименьшему отношению элементов столбца свободных членов системы ограничений к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\},$$

где минимум берётся по всем номерам i таким, что $a_{ik} > 0$; переменная x_i должна быть исключена из числа базисных переменных.

Затем систему ограничений $Ax = b$ преобразуют по схеме Жордана-Гаусса. Все вычисления записывают в таблицах, которые называют *симплексными таблицами* и составляют следующим образом.

Пусть линейно независимы первые m столбцов матрицы A; $A_1, A_2,..., A_m$ – базисные столбцы и система $Ax = b$ преобразованы так, что эти столбцы единичные, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots ,\ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases} \quad (j = 1,\dots,n).$$

Тогда симплекс-таблица имеет вид:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \boxed{c_{m+1} \quad c_{m+2} \quad \cdots \quad c_n} & & \\
 & & x_{m+1} \quad x_{m+2} \quad \cdots \quad x_n & & \\
\left.\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_m \end{array}\right| & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{array} & \left|\begin{array}{cccc} a_{1\,m+1} & a_{1\,m+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2m+1} & a_{2m+2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mm+1} & a_{mm+2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right| & \begin{array}{c} = \\ = \\ \\ = \end{array} & \left|\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{array}\right| \\
\Delta, & f & \boxed{\Delta_{m+1} \quad \Delta_{m+2} \quad \cdots \quad \Delta_n} & = & \boxed{f}
\end{array}$$

Слева в таблице указаны базисные переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ и вектор $c_\sigma = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ из коэффициентов целевой функции $f(x)$ при базисных переменных, вверху – небазисные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$; соответствующие этим переменные коэффициенты целевой функции $c_{m+1}, \dots, c_n$ и столбцы $A_{m+1}, A_{m+2}, \dots, A_n$ матрицы ограничений A, справа – столбец свободных членов и внизу – строка с обозначением “Δ, $f(x)$”, в которой записаны значения относительных оценок небазисных переменных, вычисленные по формуле (4.2), и значение целевой функции $f(x)$, вычисленное на первом опорном плане $x = (b_1, b_2, \dots, b_m,\ 0, \dots, 0)$.

Проиллюстрируем решение задачи ЛП симплекс-методом на примере задачи (3.1) – (3.2), ранее решённой геометрически.

Задачу (3.1) – (3.2) запишем в каноническом виде, введя три дополнительные переменные $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ и заменив неравенства равенствами:

$$f(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 = 9. \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_4 = 18, \\ 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_5 = 10, \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1,...,5). \end{cases}$$

(4.3)

Столбцы матрицы ограничений

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

линейно независимы, т.к. определитель, составленный из элементов столбцов

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Переменные $x_3, x_4, x_5,$ соответствующие этим столбцам, – базисные переменные, $x_1, x_2 -$ небазисные (или свободные) переменные. Положив в системе (4.3) свободные переменные равными нулю, т.е. $x_1 = 0, \ x_2 = 0,$ из (4.3) найдём $x_3 = 9, x_4 = 18, x_5 = 10$. Первое опорное решение будет $x^1 = (0;0;9;18;10)$. Для перехода к следующему опорному решению систему (4.3) запишем в виде:

$$x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_1A_1 + x_2A_2 = b$$

и составим симплекс-таблицу № 1.

Симплекс-таблица № 1

	4	2	
	x_1	x_2	

0	x_3	–1	3	=	9
0	x_4	2	3	=	18
0	x_5	$\boxed{2}$	–1	=	10
$\Delta,$	f	–4	–2	=	$\boxed{0}$

В этой таблице относительные оценки Δ_1, Δ_2 вычислены по формуле (4.2). Поскольку целевая функция $f(x) = 4x_1 + 2x_2$ не содержит переменных x_3, x_4, x_5, то вектор $c_\sigma = (0;0;0)$, при этом $c_1 = 4,\ c_2 = 2$. Имеем:

$$\Delta_1 = (0;0;0)(-1;2;2)^T - 4 = -4,$$

$$\Delta_2 = (0;0;0)(3;3;-1)^T - 2 = -2.$$

Относительные оценки базисных переменных $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ равны нулю. Значение целевой функции на первом опорном плане также равно нулю: $f(x^1) = 0$. Так как среди относительных оценок $\Delta_j\,(j = 1,\ldots,5)$ есть отрицательные $(\Delta_1 = -4 < 0,\ \Delta_2 = -2 < 0)$, то по теореме 2 план x^1 не является оптимальным. Этот план можно улучшить, поскольку среди элементов столбцов A_1 и A_2 есть положительные (теорема 4). Выбираем разрешающий столбец и разрешающую строку симплекс-таблицы №1, используя схему 1. Так как $\Delta_1 = -4 < 0$, то разрешающий столбец – первый. Для выбора разрешающей строки определим $\min\left\{\frac{18}{2};\frac{10}{2}\right\} = \frac{10}{2} = 5$, т.е. разрешающая строка – третья. Элемент $a_{31} = 2$, стоящий на пересечении разрешающего столбца и

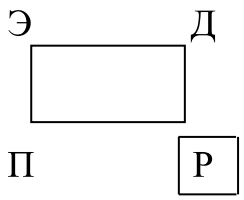
разрешающей строки, называется разрешающим элементом (в симплекс-таблице №1 он очерчен квадратиком). Преобразуем симплекс-таблицу №1 методом жордановых преобразований с выбранным разрешающим элементом по следующим правилам (схема 2):

1) разрешающий элемент Р заменяется обратной величиной $P' = 1/P$;

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент: $Э' = Э/P$;

3) остальные элементы разрешающего столбца меняют знаки на противоположные и делятся на разрешающий элемент: $Э' = -Э/P$;

4) оставшиеся элементы симплекс-таблицы преобразуются по правилу прямоугольника:



Э`=(Э Р – П Д)/Р,

где $Э-$ преобразуемый, $P-$разрешающий элементы, образующие главную диагональ, а элементы $П$ и $Д-$побочную диагональ символического прямоугольника. Символом $(')$ отмечены преобразованные элементы симплекс-таблицы. По схеме 2 с разрешающим элементом $a_{31} = 2$ получаем:

1) $a'_{31} = \frac{1}{2}$;

2) $a'_{32} = -\frac{1}{2}$; $b'_3 = \frac{10}{2} = 5$;

3) $a'_{21} = -\frac{2}{2} = -1$; $a'_{11} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$; $\Delta'_1 = -\frac{(-4)}{2} = 2$;

4) $a'_{12} = \frac{3 \cdot 2 - (-1)(-1)}{2} = \frac{5}{2}$; $b'_1 = \frac{9 \cdot 2 - (-1) \cdot 10}{2} = 14$;

$a'_{22} = \frac{3 \cdot 2 - 2(-1)}{2} = 4$; $b'_2 = \frac{18 \cdot 2 - 2 \cdot 10}{2} = 8$;

$\Delta'_2 = \frac{(-2) \cdot 2 - (-1)(-4)}{2} = -4$; $f' = \frac{0 \cdot 2 - (-4)10}{2} = 20.$

Результаты запишем в симплекс-таблицу № 2 и учтем, что переменная x_1,

соответствующая разрешающему столбцу, стала базисной переменной, а переменная
x_5, соответствующая разрешающей строке, стала свободной переменной.

Симплекс таблица № 2

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 0 & 2 & & \\
 & & x_5 & x_2 & & \\
0 & x_3 & 1/2 & 5/2 & = & 14 \\
0 & x_4 & -1 & 4 & = & 8 \\
4 & x_1 & 1/2 & -1/2 & = & 5 \\
\Delta, & f & 2 & -4 & = & 20
\end{array}
$$

Полагая в симплекс-таблице № 2 свободные переменные равными нулю, т.е. $x_5 = 0,\ x_2 = 0$, и решая соответствующие уравнения, получим новое опорное решение $x^2 = (5;0;14;8;0)$, при этом значение целевой функции увеличилось: $f(x^2) = 20 > f(x^1) = 0$.

Так как $\Delta_2 = -4 < 0$ и во втором столбце есть положительные элементы, то согласно теореме 4 полученный план x^2 можно улучшить, переходя к новой симплекс-таблице № 3.

Разрешающий столбец – второй, $\min\left\{14 : \frac{5}{2}; \frac{8}{4}\right\} = 2$, следовательно, разрешающая строка – вторая, разрешающий элемент $a_{22} = 4$.

Симплекс-таблица № 3

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 0 & 0 & & \\
 & & x_5 & x_4 & & \\
0 & x_3 & 9/8 & -5/8 & = & 9 \\
2 & x_2 & -1/4 & 1/4 & = & 2 \\
4 & x_1 & 3/8 & 1/8 & = & 6
\end{array}
$$

Δ,	f	1	1	=	28

Новый опорный план $x^3 = (6;2;9;0;0)$, и так как все $\Delta_j > 0$, то по теореме 2 полученный опорный план является оптимальным $x^* = (6;2)$, $f(x^*) = 28$.

Оптимальное решение задачи (3.1)–(3.2), полученное симплекс-методом, совпадает с решением, полученным ранее графически. Исходный опорный план x^1 соответствует точке $O(0,0)$ пятиугольника $OABCD$ (рис. 1), x^2 – вершина D, x^3 – вершина C, в которой достигается максимум.

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ ПРОИЗВОДСТВА

Задача 1. Предприятие может производить продукцию двух видов P_1, P_2 из трех видов сырья S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество сырья, затрачиваемое на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемой от реализации единицы продукции, приведены в следующей таблице:

Виды сырья S_i $(i = 1,2,3)$	Количество сырья, идущее на изготовление единицы продукции P_j $(j = 1,2)$		Запасы сырья $\bar{S}_i$
	P_1	P_2	
S_1	12	4	300
S_2	4	4	120
S_3	3	12	252
Прибыль от реализации единицы продукции	30	40	

Требуется составить такой план производства, который обеспечил бы максимальную прибыль от реализации всей продукции.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_j количество продукции $P_j(j = 1,2)$, выпускаемое предприятием. Умножая удельные составляющие сырья $S_1(12$ и $4)$ на соответствующие объёмы x_1 и x_2 продук-

ций P_1 и P_2, получим:

$12x_1 -$ затраты сырья S_1 на изготовление всей продукции P_1,

$4x_2 -$ затраты сырья S_1 на изготовление всей продукции P_2.

Тогда $12x_1 + 4x_2 -$суммарное затраты сырья S_1 на изготовление всей продукции видов P_1 и P_2. Так как суммарные затраты сырья S_1 не должны превышать его запасов, равных 300 единицам, то получим ограничение на использование сырья S_1:

$$12x_1 + 4x_2 \le 300.$$

Аналогично получим ограничения на использование сырья S_2 и S_3:

$$4x_1 + 4x_2 \le 120,$$

$$3x_1 + 12x_2 \le 252.$$

На переменные x_1 и x_2 следует также наложить естественные ограничения

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

Обозначим через $f(x)$ прибыль, полученную предприятием от реализации всей продукции. Так как известны прибыли от реализации единицы продукции каждого вида (30 и 40), то

$$f(x) = 30x_1 + 40x_2.$$

Окончательно математическая модель задачи ЛП имеет вид:

$$f(x) = 30x_1 + 40_2 \to \max$$

(5.1)

при ограничениях

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (5.2)$$

Для решения задачи (5.1) – (5.2) воспользуемся ранее описанными методами – графическим и симплекс-методом, обратив при этом внимание на экономический смысл полученных решений.

Построим на плоскости (x_1, x_2) многоугольник допустимых решений R – пятиугольник $OABCD$ (рис.2). Перемещая линию уровня $30x_1 + 40x_2 = 0$ в направлении вектора $c = gradf(x) = (30;40)$, видим, что предельной общей её точкой с многоугольником R является точка B. Координаты точки B как точки пересечения прямых найдём, решая систему уравнений:

Перемещая линию уровня $30x_1 + 40x_2 = 0$ в направлении вектора $c = gradf(x) = (30;40)$, видим, что предельной общей её точкой с многоугольником R является точка B. Координаты точки B как точки пересечения
прямых (2) и (3) найдем, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases} \Rightarrow B(12;18)$$

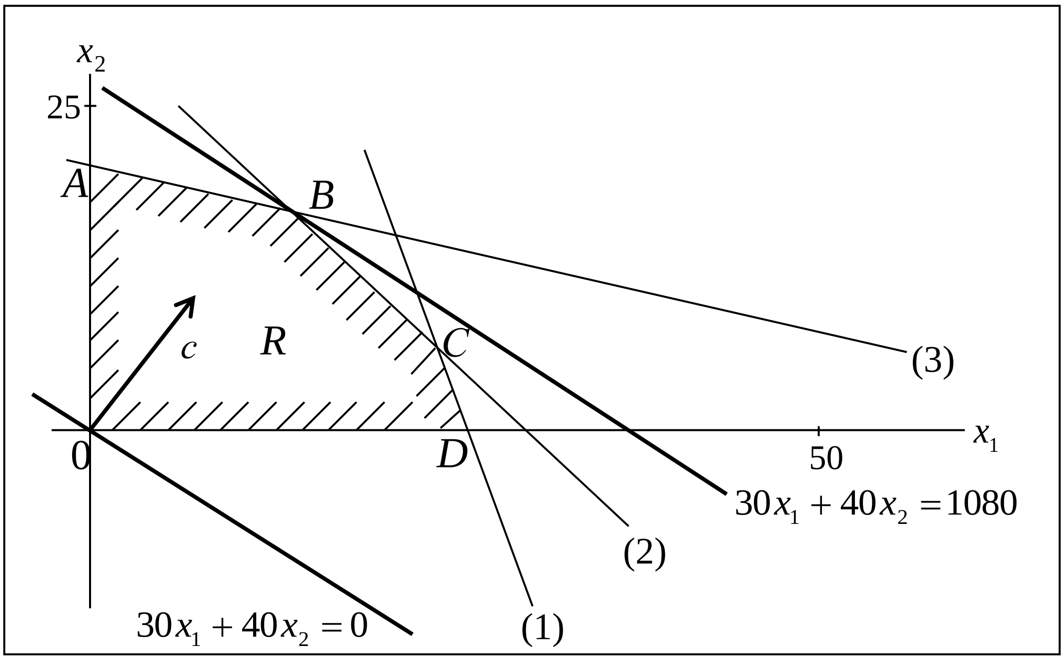


Рис.2

Оптимальный план $x^* = (12;18)$, $f(x^*) = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ (денежных

единиц). Следовательно, если предприятие изготовит $x_1^* = 12$ единиц продукции вида P_1 и $x_2^* = 18$ единиц продукции вида P_2, то прибыль будет максимальной и составит 1080 денежных единиц. При этом будут полностью израс-
ходованы запасы сырья S_2 и S_3 и останутся неизрасходованными запасы сырья S_1 , так как

$$12 \cdot 12 + 4 \cdot 18 = 216 < 300.$$

Задачу (5.1) – (5.2) решим также симплекс-методом, для этого запишем её в каноническом виде, введя дополнительные переменные $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$:

$$f(x) = 30x_1 + 40x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + x_3 = 300, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 + x_5 = 252, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, .., 5). \end{cases}$$

При любых допустимых объёмах x_1, x_2 выпускаемой продукции P_1, P_2 дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 можно интерпретировать как остатки сырья S_1, S_2, S_3 соответственно.

Симплекс-таблица № 1

		30	40		
		x_1	x_2		
0	x_3	12	4	=	300
0	x_4	4	4	=	120
0	x_5	3	$\boxed{12}$	=	252
Δ,	f	-30	-40	=	0

Полагая свободные переменные $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, получим первое опорное решение $x^1 = (0;0;300;120;252)$, $f(x^1) = 0$, т.е. если предприятие не выпускает продукцию $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$, то остатки сырья равны его запасам $(x_3 = 300,\ x_4 = 120,\ x_5 = 252)$ и прибыль предприятия $f(x^1) = 0$. План не оптимальный, т.к. $\Delta -$строка содержит отрицательные оценки $(\Delta_1 = -30,\ \Delta_2 = -40)$.

По схеме 1 выбираем разрешающий столбец (второй), разрешающую строку (третью) и проводим один шаг жордановых преобразований по схеме 2. Получим:

Симплекс-таблица № 2

		30	0		
		x_1	x_5		
0	x_3	11	–1/3	=	216
0	x_4	$\boxed{3}$	–1/3	=	36
40	x_2	1/4	1/12	=	21
Δ,	f	–20	10/3	=	840

Опорный план, соответствующий симплекс-таблице № 2, $x^2 = (0;21;216;36;0)$, $f(x^2) = 840$, т.е. если предприятие не будет производить продукцию вида P_1 $(x_1 = 0)$ и изготовит 21 единицу продукции вида P_2 $(x_2 = 21)$, то прибыль составит $f(x^2) = 840$ денежных единиц, при этом останутся неизрасходованными 216 единиц сырья S_1 и 36 единиц сырья S_2, сырьё S_3 будет израсходовано полностью $(x_5 = 0)$.

Полученный опорный план x^2 не является оптимальным, поэтому проводим ещё одно жорданово преобразование.

Симплекс-таблица № 3

0	0
x_4	x_5

0	x_3	$-11/3$	$8/9$	=	186
30	x_1	$1/3$	$-1/9$	=	12
40	x_2	$-1/12$	$1/9$	=	18
Δ,	f	$20/3$	$10/9$	=	1080

Опорный план, соответствующий симплекс-таблице № 3, $x^3 = (12;18;186;0;0)$,

$f(x^3) = 1080$, является оптимальным, т.к. $\Delta-$ строка не содержит отрица-
тельных оценок.

Вывод: если предприятие изготовит $x_1^* = 12$ единиц продукции P_1 и $x_2^* = 18$ единиц продукции P_2, то прибыль его будет максимальной – $f(x*) = 1080$ денежных единиц, при этом запасы сырья S_2 и S_3 будут полностью исчерпаны $(x_4^* = 0,\ x_5^* = 0)$, остаток сырья S_1 составит 186 единиц $(x_3^* = 186)$.

ПАРА ВЗАИМНО ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛП. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЛП

Парой *взаимно двойственных* задач ЛП называются задачи (6.1) и (6.2):

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = (c, x) \to \max \\ Ax \le b, \\ x \ge 0; \end{array}\right\} \quad (6.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} d(y) = (b, y) \to \min \\ A_y^T \ge c, \\ y \ge 0; \end{array}\right\} \quad (6.2)$$

где $c, x \in R_n$; $y, b \in R_m$; $A = (a_{ij})$ $(i = 1,..., m;\ \ j = 1,..., n)$.

Задачи (6.1) и (6.2) взаимно двойственны, т.е. если задача максимизации (6.1) – исходная, то задача минимизации (6.2) – двойственная к ней и наоборот.

Если исходная задача ЛП сформулирована в канонической форме:

$$\begin{cases} f(x) = (c, x) \to \max, \\ Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

то двойственная к ней задача имеет вид:

$$\begin{cases} d(y) = (b, y) \to \min, \\ A^T y \geq 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

и наоборот.

Справедливы следующие основные теоремы, устанавливающие связь между оптимальными решениями взаимно двойственных задач.

Теорема 5 *(первая теорема двойственности). Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач на их оптимальных планах равны между собой, т.е.* $f(x^*) = d(y^*)$. *Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена, то другая задача вообще не имеет допустимых планов.*

Теорема 6 *(вторая теорема двойственности). Для того, чтобы допустимые планы* x^*, y^* *исходной (6.3) и двойственной (6.4) задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

$$\begin{aligned} &(x^*, A^T y^* - c) = 0, \\ &(y^*, b - Ax^*) = 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Скалярная форма условий (6.5) имеет вид:

$$\text{если } x_j^* > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* = c_j \ \ (j = 1,..., n);$$

$$\text{если } y_j^* > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i \ \ (i = 1,..., m);$$

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_{i,} \text{ то } y_j^* = 0 \ \ (i = 1,..., m);$$

$$\text{если } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* < c_j, \text{ то } x_j^* = 0 \ \ (j = 1,..., n),$$

т.е. если в оптимальном плане x^* какая-либо компонента $x_j^* > 0$, то соответствующее ей i-е ограничение двойственной задачи на её оптимальном плане y^* обращается в равенство; если оптимальный план x^* обращает i-е неравенство этой задачи в строгое неравенство, то соответствующая ему компонента y_j^* в оптимальном плане двойственной задачи обращается в ноль.

Рассмотрим применение теории двойственности задач к решению задач ЛП на следующем примере.

Задача 2. Дана задача ЛП:

$$f(x) = 6x_1 + 11x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min, \tag{6.6}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 3x_4 \geq 7, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,...,4). \end{cases} \tag{6.7}$$

Требуется:

1) сформулировать двойственную задачу к задаче (6.6) – (6.7);

2) решить двойственную задачу графически;

3) найти оптимальное решение исходной задачи (6.6) – (6.7), используя теоремы двойственности.

Сформулируем задачу, двойственную к задаче (6.6) – (6.7).

Исходная задача:

$$f(x) = (c, x) = 6x_1 + 11x_2 + 5x_3 + x_4 \to \min,$$

$$Ax = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,...,4).$$

Двойственная задача, по определению, будет иметь вид:

$$d(y) = (b, y) = 3y_1 + 7y_2 \to \max,$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

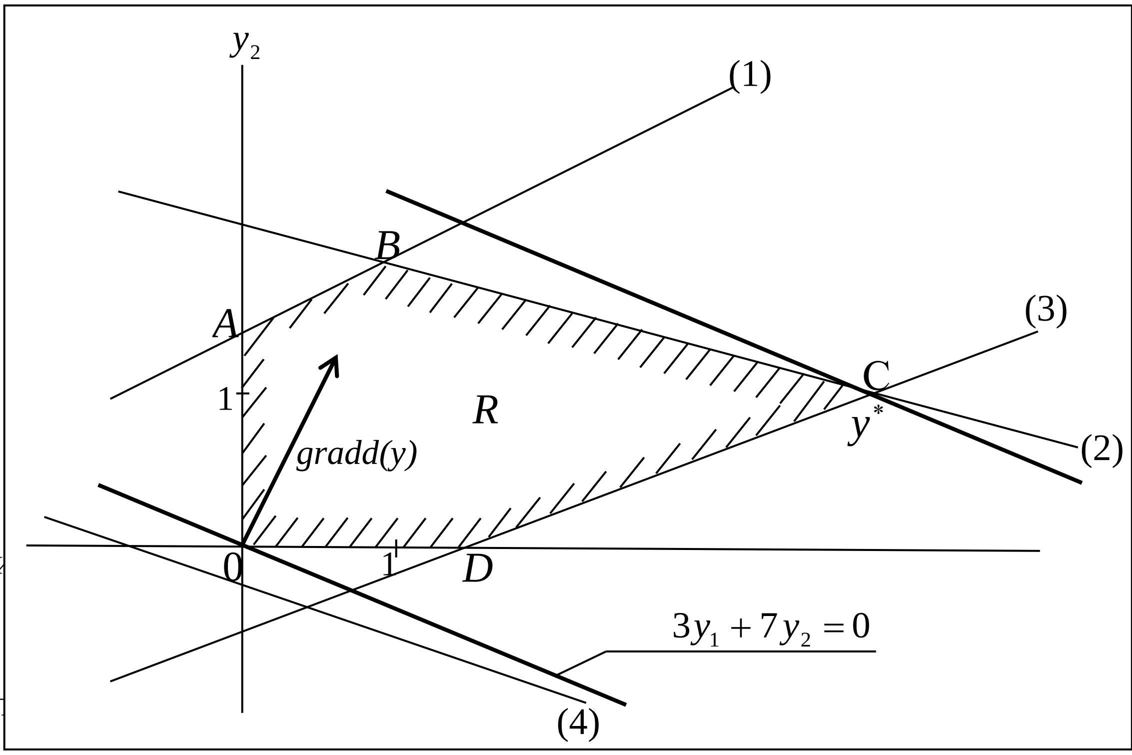
Двойственная задача, записанная в скалярной, форме принимает вид:

$$d(y) = (b, y) = 3y_1 + 7y_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -3y_1 + 4y_2 \leq 6, \\ y_1 + 3y_2 \leq 11, \\ 3y_1 - 5y_2 \leq 5, \\ -y_1 - 3y_2 \leq 1, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Полученная задача имеет две переменные y_1, y_2, поэтому её решение можно найти геометрически. Построим многоугольник допустимых решений

R, определяемый системой неравенств (6.8) (рис.3). Для этого проводим ограничительные линии: (1) $-3y_1+4y_2=6$, (2) $y_1+3y_2=11$, (3) $3y_1-5y_2=5$, (4) $-y_1-3y_2=1$ и штриховкой помечаем полуплоскости, определяемые неравенствами (6.8).



им

лини

и п ора

$\bar{b}=grad\ d(y)=(3;7)$. Оптимальной вершиной R является точка C, координаты которой определим из решения системы:

$$\begin{cases} y_1+3y_2=11, \\ 3y_1-5y_2=5 \end{cases} \Rightarrow C(5;2).$$

Итак, $y_1^*=5,\ y_1^*=2;\ y^*=(5;2);$

$\max d(y)=d(y^*)=3\cdot 5+7\cdot 2=29$.

Зная оптимальный план двойственной задачи, найдём оптимальный план исходной задачи x^*, используя теоремы двойственности.

По теореме 5 можно утверждать, что исходная задача (6.6)–(6.7) имеет оптимальный план x^*, на котором целевая функция принимает значение $f(x^*)=d(y^*)=29$. Сам оптимальный план x^* получим из условия (6.5) теоремы 6. Так как $y^*=(5;2)$ имеет две положительные компоненты, то соответствующие им ограничения исходной задачи (6.7) на оптимальном плане $x^* = (x_1^*, x_1^*, x_3^*, x_4^*)$ обращаются в равенства:

$$\begin{cases} -3x_1^* + x_2^* + 3x_3^* - x_4^* = 3, \\ 4x_1^* + 3x_2^* - 5x_3^* - 3x_4^* = 7. \end{cases}$$

(6.9)

При этом $x_1^* = 0$ и $x_4^* = 0$, так как первое и четвёртое ограничения системы (6.8) на плане y^* обращаются в строгие неравенства.

С учетом последнего замечания система (6.9) принимает вид:

$$\begin{cases} x_2^* + 3x_3^* = 3, \\ 3x_2^* - 5x_3^* = 7 \end{cases}$$

и имеет решение $x_2^* = 18/7$, $x_3^* = 1/7$. Следовательно, оптимальный план исходной задачи $x^* = (0;18/7;1/7;0)$; на нём целевая функция принимает минимальное значение

$$f_{\min} = f(x^*) = 6 \cdot 0 + 11 \cdot \frac{18}{7} + 5\frac{1}{7} + 1 \cdot 0 = \frac{203}{7} = 29 = d(y^*).$$

4.5. Транспортная задача

Классическая модель транспортной задачи формулируется следующим образом.

Некоторый однородный продукт, сосредоточенный у m поставщиков A_i в количестве a_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ единиц соответственно, необходимо доставить к потребителям B_j в количестве b_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю. Необходимо составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы, полностью удовлетворить потребности и имеющий минимальную стоимость.

Решим задачу для условного случая, когда фамилия студента записана в журнале группы под № 42. Исходные данные выбираем из табл. 5 раздела 3. Так как 42 число чётное, то принимаем число поставщиков равным пяти

$\left(A_i, i=\overline{1,5}\right)$, а число потребителей B_j, равным четырём $\left(j=\overline{1,4}\right)$. При этом число десятков в номере $a = 4$, а число единиц $b = 2$. Подставив эти значения в табл. 5, получим исходные данные задачи. a_i, b_j, c_{ij}:

Таблица 5.1

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	6	6	7	8	22
A_2	7	8	4	8	26
A_3	7	5	9	8	48
A_4	11	11	7	7	14
A_5	8	6	4	4	40
b_j	14	27	36	17	

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, запланированных к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю. Тогда математическую модель задачи можно записать следующим образом. Найти такую матрицу X=(x_{ij}) $\left(i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,4}\right)$, чтобы функция

$$f(x) = 6x_{11} + 6x_{12} + 7x_{13} + 8x_{14} + 7x_{21} + 8x_{22} + 4x_{23} + 8x_{24} + 7x_{31} + 5x_{32} + 9x_{33} + \\ + 8x_{34} + 11x_{41} + 11x_{42} + 7x_{43} + 7x_{44} + 8x_{51} + 6x_{52} + 4x_{53} + 4x_{54} \to \min \qquad (4.26)$$

— общая стоимость перевозок достигала наименьшего значения при ограничениях:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=22, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=26, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=48, \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=14, \\ x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}=40, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=14, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=27, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=36, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=17, \\ x_{ij}\ge 0 \quad \left(i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,4}\right) \end{cases} \tag{4.27}$$

Так как минимизируемая функция $f(x)$ есть линейная относительно переменных x_{ij} и ограничения задачи (4.27) также линейны, то сформулированная задача является задачей ЛП. Коротко её можно записать так:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \min, \tag{4.28}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad \left(i=\overline{1,5}\right), \\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad \left(j=\overline{1,4}\right), \\ x_{ij}\ge 0 \quad \left(i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,4}\right). \end{cases} \tag{4.29}$$

Транспортная задача называется *закрытой*, если выполняется условие равенства суммарного объёма запасов $\sum_{i=1}^{m}a_i$ и суммарного объёма потребностей $\sum_{j=1}^{n}b_j$, (т.е. если $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$) и называется *открытой* в противном случае (т.е. если $\sum_{i=1}^{m}a_i\ne\sum_{j=1}^{n}b_j$).

Справедлива следующая

Теорема 7. *Любая закрытая транспортная задача имеет решение*.

Задача (4.26) – (4.29) является открытой задачей, так как

$\sum_{i=1}^{m} a_i = 22+26+48+14+40=150 \neq \sum_{j=1}^{n} b_j = 14+27+36+17=94.$ Сведём задачу к закрытой, введя фиктивного B_5=$D_ф$ потребителя с потребностью $b_5 = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 150-94=56$ единиц продукции. При этом стоимость перевозок от любого из поставщиков A_i к потребителю B_5 полагаем равными нулю, т.е.c_{i5}=0, $\left(i=\overline{1,5}\right)$. Согласно теореме 7 такая задача разрешима. Новая задача коротко запишется так:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{4.30}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i=\overline{1,5}\right), \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j=\overline{1,5}\right), \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

Исходные данные «новой» задачи запишем в табл. 5.2, указывая запасы a_i=$\left(i=\overline{1,5}\right)$, потребности b_j=$\left(j=\overline{1,5}\right)$ и в левом верхнем углу клетки c_{ij} — стоимости перевозок от i-го поставщика к j-му потребителю $\left(i=\overline{1,5},\ j=\overline{1,5}\right)$.

Применим для решения задачи метод потенциалов. Это итерационный метод, основными этапами которого являются следующие:

1) построение первоначального опорного плана;
2) проверка построенного плана на оптимальность; если план оптимальный, то задача решена, если нет, то — шаг 3;
3) построение нового плана (с использованием системы потенциалов), на котором значение функции стоимости перевозок будет меньше, чем на предыдущем.

Таблица 5.2

	B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_i		6	6	2	1	-7	a_i

A_1	0	14 6	8 6	7	8	0	22
A_2	2	1 7	19 8	7 4	8	0	26
A_3	7	6 7	8 5	29 9	17 8	2 0	48
A_4	7	2 11	2 11	2 7	1 7	14 0	14
A_5	7	5 8	7 6	5 4	4 4	40 0	40
b_j		14	27	36	17	56	

Для построения первоначального опорного плана применим метод «северо-западного угла». Начинаем распределять продукцию с клетки (1.1). Поместим в эту клетку наименьшее из чисел a_1 и b_1, т.е. x_{11}=min (a_1, b_1)= =min (22,14)=14 (запишем его в левый нижний угол клетки). Тогда запрос первого потребителя B_1 будет полностью удовлетворен, и первый столбец исключается из рассмотрения. Двигаемся далее по первой строке вправо. В клетку (1.2) запишем x_{12}=min(a_1-b_1, b_2)=min(22-14,27)=8, исключаем из рассмотрения первую строку, так как все запасы поставщика A_1 использованы.

Переходим ко второй строке. В клетку (2.2) запишем x_{22}=min(a_2, b_2-x_{12})=min(26,27-8)=19 единиц продукции из запасов поставщика A_2, тогда запрос потребителя B_2 будет удовлетворен, а остаток продукции у поставщика A_2 , равный 26–19=7 единицам, помещаем в клетку (2.3) (x_{23} = 7). Исключаем из рассмотрения вторую строку и второй столбец. Двигаясь по третьему столбцу вниз, полагаем x_{33}=29, тогда удовлетворен полностью запрос потребителя B_3, остаток продукта у A_3, равный 48–29=19, распределяем между клетками (3.4) (x_{34}=17) и (3.5) (x_{35}=2). При этом полностью удовлетворены потребности потребителя B_4. Остальную продукцию распределим, положив x_{45}=14 и x_{55}=40. Остальные x_{ij} полагаем равными нулю, им соответствуют свободные клетки табл. 5.2. Построенный таким образом план является допустимым, так как позволяет удовлетворить запросы всех потребителей (сумма x_{ij} по столбцам равна b_j) и использовать запасы всех поставщиков $\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,5} \right)$.

При этом переменные $x_{ij}>0$, соответствующие занятым клеткам, являются базисными, а переменные $x_{ij}=0$, соответствующие пустым клеткам таблицы, — свободными. Напомним, что допустимый план транспортной задачи (ТЗ) называется невырожденным, если число базисных переменных x_{ij} равно рангу $m+n-1$ матрицы ограничений (4.31). При $m=5$, $n=5$ число базисных переменных должно быть равно 5+5-1=9. Таким образом, построенный план x_{11} =14, x_{12} =8, x_{22} =19, x_{23} =7, x_{33} =29, x_{34} =17, x_{35} =2, x_{45}=14, x_{55} =40 является невырожденным.

Отметим, что если план получился вырожденным, т.е. число базисных переменных x_{ij} меньше $m+n-1$, то в соответствующие свободные клетки записывают нулевые значения x_{ij} и эти клетки считаются занятыми, т.е. базисными.

Вычислим значение целевой функции $f(x)$ на первом опорном плане: $f(x^1)$=14·6+8·6+19·8+7·4+29·9+17·8=709 (единиц стоимости).

Переходим ко второму этапу итерационного метода, т.е. построенный план проверим на оптимальность. Для этого каждой строке таблицы 5.2 поставим в соответствие переменную u_i $\left(i = \overline{1,5}\right)$, называемую *потенциалом строки* (или *потенциалом поставщика*) и каждому столбцу — переменную v_j $\left(j = \overline{1,5}\right)$ — *потенциал столбца* (или *потребителя*). Потенциалы u_i и v_j — это двойственные переменные к переменным x_{ij} задачи (4.30), (4.31). Справедлива

Теорема 8 (критерий оптимальности опорного плана теоремы 3). *Если для некоторого опорного плана $x^*=(x_{ij})$ $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ ТЗ существуют такие числа u_i и v_j, что $u_i + v_j = c_{ij}$ для $x^*_{ij} > 0$ и $u_i + v_j \le c_{ij}$ для $x^*_{ij} = 0$ для всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$, то $x^*=(x_{ij})$ — оптимальный план ТЗ.*

Теорема 8 позволяет проверить первый опорный план на оптимальность. Определим сначала потенциалы строк и столбцов таблицы 5.2, используя условие u_i + v_j = c_{ij} для всех базисных клеток таблицы. Получаем систему уравнений:

$u_1 + v_1 = 6,$
$u_1 + v_2 = 6,$
$u_2 + v_2 = 8,$
$u_2 + v_3 = 4,$
$u_3 + v_3 = 9,$
$u_3 + v_4 = 8,$
$u_3 + v_5 = 0,$
$u_4 + v_5 = 0,$
$u_5 + v_5 = 0.$

Система состоит из девяти уравнений с десятью неизвестными, поэтому положим u_1=0, а остальные неизвестные определим последовательно, рассматривая уравнения системы:

$v_1 = 6,\ v_2 = 6,\ u_2 = 2,\ v_3 = 2,\ u_3 = 7,\ v_4 = 1,\ v_5 = -7,\ u_4 = 7,\ u_5 = 7.$

Полученные значения потенциалов запишем в табл. 5.2 в одной строке с потребителями и в одном столбце с поставщиками.

Далее для каждой свободной клетки табл. 5.2, т.е. для всех x_{ij}=0, определим числа $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} - 0 + 2 - 7 = -5;$
$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 1 - 8 = -7;$
$\Delta_{15} = u_1 + v_5 - c_{15} = 0 - 7 - 0 = -7;$
$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 2 + 6 - 7 = 1;$
$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 2 + 1 - 8 = -5;$

$\Delta_{25} = u_2 + v_5 - c_{25} = 2 - 7 - 0 = -5;$
$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 7 + 6 - 7 = 6;$
$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 7 + 6 - 5 = 8;$
$\Delta_{41} = u_4 + v_1 - c_{41} = 7 + 6 - 11 = 2;$
$\Delta_{42} = u_4 + v_2 - c_{42} = 7 + 6 - 11 = 2;$
$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = 7 + 2 - 7 = 2;$
$\Delta_{44} = u_4 + v_4 - c_{44} = 7 + 1 - 7 = 1;$
$\Delta_{51} = u_5 + v_1 - c_{51} = 7 + 6 - 8 = 5;$
$\Delta_{52} = u_5 + v_2 - c_{52} = 7 + 6 - 6 = 7;$
$\Delta_{53} = u_5 + v_3 - c_{53} = 7 + 2 - 4 = 5;$
$\Delta_{54} = u_5 + v_4 - c_{54} = 7 + 1 - 4 = 4.$

По теореме 8 для оптимального плана все числа Δ_{ij} должны быть неположительны $(\Delta_{ij} \le 0)$. Среди чисел Δ_{ij}, вычисленных по таблице 5.2, есть положительные, следовательно, первый опорный план x^1 не является оптимальным. Значения $\Delta_{ij}>0$ также внесены в табл. в левом верхнем углу клетки и обведены рамкой.

Напомним, что сумму потенциалов свободной клетки u_i+v_j называют *фиктивной стоимостью* перевозки единицы продукции от i-го поставщика к j-му потребителю. По известному критерию, если фиктивная стоимость меньше или равна реальной стоимости для всех свободных клеток, то план оптимальный.

Переходим к третьему этапу метода потенциалов — построим новый опорный план, улучшающий значение целевой функции. Для этого среди чисел $\Delta_{ij}>0$ выбираем наибольшее $(\Delta_{32} = 8)$ и свободную переменную x_{32} введём в число базисных переменных, т.е. перераспределим перевозки так, чтобы клетка (3.2) стала базисной, а одна из занятых клеток — свободной, но при этом не нарушился баланс запасов и заявок. Построим цикл, содержащий клетку (3.2). Напомним прежде, что *циклом* в табл. ТЗ называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья — вдоль строк и столбцов, причём в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, а другое в столбце. Для пустой клетки (3.2) существует единственный цикл из занятых клеток (3.3), (2.3), (2.2), включающих эту пустую клетку (рис. 4 а)

а) б)

Рис. 4

Производим перераспределение объёмов поставок грузов по данному циклу так, чтобы клетка (3.2) стала занятой и при этом сохранился баланс объёмов грузов по строкам и столбцам. Для этого присвоим знак «+» клетке (3.2), а остальным клеткам цикла поочерёдно знаки минус и плюс. Знак «+» означает, что объем поставок в эту клетку будет увеличен на T>0 единиц груза , «-» — объём будет уменьшаться на T единиц. Максимальный объём груза T, который можно переместить по циклу пустой клетки, равен наименьшему объему поставок в клетках цикла, отмеченных знаком «-», т.е. T=min(29.19)=19.

В результате получим новый преобразованный цикл клетки (3.2) (рис. 4 б). Заменяя в таблице 5.2 исходный цикл преобразованным, получим новый опорный план, который записан в табл. 5.3.

Таблица 5.3

u_i	6	6	10	9	1	a_i
0	14 6	8 6	3 7	8	1 0	22
-6	7	8	26 4	8	0	26
-1	7	19 5	10 - 9	17 8	2 + 0	48
-1	11	11	2 7	1 7	14 0	14

-1	8	6	5 + 4	4 4	40 0	40
b_j	14	27	36	17	56	

Для новой таблицы проверим, равна ли сумма элементов i-ой строки числу a_i, а сумма элементов j-го столбца — b_j. Вычислим значение целевой функции на новом опорном плане:

$$f(x^2)=14\cdot6+8\cdot6+26\cdot4+19\cdot5+10\cdot9+17\cdot8=557 \text{ (ед)}.$$

Стоимость перевозок уменьшилась на величину $\Delta z=\Delta_{32}\cdot T=8\cdot19=152$ (ед). Новый опорный план следует проверить на оптимальность; для этого вычислим потенциалы строк и столбцов табл. 5.3, по занятым клеткам из условия $u_i+v_j=c_{ij}$. Результаты записываем в таблицу. Для свободных клеток вычисляем числа $\Delta_{ij}=u_i+v_j-c_{ij}$ и положительные значения Δ_{ij} записываем в левом верхнем углу клетки и обводим рамкой. Так как среди последних есть положительные, то план x^2 не является оптимальным. Наибольшим из положительных чисел Δ_{ij} является $\Delta_{53}=5$. Строим цикл для клетки (5.3), в табл. 5.3 он отмечен сплошной линией, вершинам цикла приписываем знаки «+» и «-». Объем перевозок $T=\min(10;40)=10$.

Новый опорный план и соответствующие ему данные занесены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

u_i	6	6	5	9	1	a_i
0	16 14	6 8	7	1 8	1 0	22
-1	7	8	26 4	8	0	26
-1	7	19 5	9	17 - 8	12 + 0	48
-1	11	11	7	1 7	14 0	14
-1	8	6	10 4	4 + 4	30 - 0	40
b_j	14	27	36	17	56	

Новое значение целевой функции

$$f\left(x^3\right)=14\cdot 6+8\cdot 6+26\cdot 4+19\cdot 5+17\cdot 8+10\cdot 4=507<f\left(x^2\right)=557.$$

Проверим построенный план на оптимальность, вычисляя новые значения потенциалов строк и столбцов и новые значения Δ_{ij} для незанятых клеток таблицы. Среди чисел Δ_{ij} есть положительные, следовательно, план x^3 не оптимальный. Наибольшее из положительных чисел Δ_{ij} равно $\Delta_{54}=4$, строим цикл для клетки (5.4), $T=\min(17;30)=17$.

Новый опорный план заносим в табл. 5.5 и вычисляем соответствующее значение целевой функции:

Таблица 5.5

u_i	6	6	5	5	1	a_i
0	14 6	8 - 6	7	8	1 + 0	22
-1	7	8	26 4	8	0	26
-1	7	19 + 5	9	8	29 - 0	48
-1	11	11	7	7	14 0	14
-1	8	6	10 4	17 4	13 0	40
b_j	14	27	36	17	56	

$$f\left(x^4\right)=14\cdot 6+8\cdot 6+26\cdot 4+19\cdot 5+10\cdot 4+17\cdot 4=439<f\left(x^3\right)=507.$$

Вычисляем потенциалы строк и столбцов табл. 5.5, а также числа Δ_{ij}. Среди них есть положительное, поэтому план не оптимальный. Строим цикл для клетки (1,5) при $T=\min(8;29)=8$.

Таблица 5.6

u_i	6	6	5	5	1	a_i
0	14 6	8 - 6	7	8	1 + 0	22
-1	7	8	26 4	8	0	26
-1	7	19 + 5	9	8	29 0	48

-1	11	11	7	7	14 0	14
-1	8	6	10 4	17 4	13 0	40
b_j	14	27	36	17	56	

$$f\left(x^5\right) = 14 \cdot 6 + 26 \cdot 4 + 27 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 17 \cdot 4 = 431 < f\left(x^4\right) = 439.$$

Вычисляем потенциалы строк и столбцов табл. 5.6, Δ_{ij}. Так как для таблицы 5.6 все числа $\Delta_{ij} \le 0$, то план x^5 — оптимальный, при этом оптимальная стоимость перевозок равна 431 денежной единице.

Для поставленной ТЗ рассчитаем первоначальный опорный план x^1 методом «минимальной стоимости».

Таблица 5.7

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	14 6	6	7	8	8 0	22
A_2	7	8	26 4	8	0	26
A_3	7	27 5	9	8	21 0	48
A_4	11	11	7	7	14 0	14
A_5	8	6	10 4	17 4	13 0	40
b_j	14	27	36	17	56	

Согласно этому методу в таблице стоимостей c_{ij} находим минимальный элемент (без учёта фиктивных перевозок) c_{23}=4 и все запасы поставщика A_2 — 26 единиц груза — перевозим к потребителю B_3. Строку вторую вычёркиваем. Из оставшихся берём наименьшее c_{ij} (c_{53}=4) и, чтобы удовлетворить запрос B_3, перебрасываем 10 единиц груза от A_5 к B_3. Столбец третий вычёркиваем. Так как c_{54}=4, то запрос потребителя B_4 удовлетворим за счет A_5, столбец четвёртый вычёркиваем. Из оставшихся — наименьшее значение c_{32}=5, поэтому 27 единиц груза перевозим от A_3 к B_2, вычёркиваем столбец второй и неудовлетворенный запрос первого потребителя — 14 единиц — удовлетворим за счёт A_1 с минимальной стоимостью перевозок c_{11}=6 денежных единиц. Таким образом, удовлетворены запросы всех действительных потребителей, а остатки продукции поставщиков A_1 (8 единиц), A_3 (21 единица), A_4 (14) и A_5 (13) можно направить фиктивному потребителю. Получим оптимальный план, совпадающий с полученным ранее в табл. 5.6.

Следует иметь в виду, что далеко не всегда метод минимальной стоимости позволяет получить опорный план, являющийся сразу оптимальным, как в данной задаче. Однако иногда этот метод позволяет существенно сократить число итераций в методе потенциалов при решении транспортной задачи.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Задания для практических занятий по курсу "Методы оптимальных решений"

Исследование функции одной переменной

Построить график функции y=f(x), используя общую схему исследования функции. Определить абсолютный максимум и абсолютный минимум функции на отрезке [a, b].

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	a	b
1	x^3+6x^2+9x+4	–2	1
2	$x^3+6x^2-15x+8$	–1	3
3	$x^3+12x^2+45x+50$	–1	2
4	x^3-3x^2-9x-5	–2	2
5	$x^3+3x^2-24x+28$	–1	3
6	x^3+3x^2-9x+5	–2	2
7	$x^3-3x^2-24x-28$	–3	1
8	x^3-6x^2+9x-4	–1	2
9	$x^3-6x^2-15x-8$	–2	2
10	$x^3-12x^2+45x-50$	0	4
11	$x^3-9x^2+24x-18$	–1	3
12	$-x^3+9x^2-15x-3$	0	3

13	$2x^3-15x^2+24x+1$	–1	2
14	$-x^3+6x^2-9x+2$	–2	2
15	x^3+4x^2-3x-8	–2	2
16	$-x^3+x^2+5x+3$	–2	1
17	$x^3-12x+5$	–1	3
18	$2x^3-12x^2+18x-5$	–1	2
19	$x^3-15x^2+48x+3$	–1	3
20	$-5x^3+30x^2-45x+10$	0	2

Функции нескольких переменных.

Задание 1. Найти область определения и область непрерывности функции $Z = Z(x, y)$ и изобразить ее графически.

№ вар.	**Функция Z (x, y)**	**№ вар.**	**Функция Z (x, y)**
1	$Z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$	**11**	$Z=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$
2	$Z=\ln(y-2x^2)$	**12**	$Z=\ln(6x-y^2)$
3	$Z=\arcsin(x-y)$	**13**	$Z=\arcsin(2x+y)$
4	$Z=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$	**14**	$Z=\dfrac{1}{9-x^2-9y^2}$
5	$Z=\sqrt{x-4y^2}$	**15**	$Z=\sqrt{x^2+4y}$
6	$Z=\arccos(2x+y)$	**16**	$Z=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy}$
7	$Z=\ln(x^2+4y^2)$	**17**	$Z=\ln(x^2+2y^2-4)$
8	$Z=x+\sqrt{x+y}$	**18**	$Z=y^2+\sqrt{xy}-1$
9	$Z=\dfrac{\sqrt{xy}}{x-y}$	**19**	$Z=\dfrac{x-3}{\sqrt{x+y}}$
10	$Z=\sqrt{4-x^2-4y^2}$	**20**	$Z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{x^2+y^2}$

Задание 2. Записать уравнение семейства линий уровня функции $Z = Z(x, y)$. Выделить линию уровня, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, и изобразить ее графически.

№ вар.	**Функция $Z(x, y)$**	**$M_0(x_0, y_0)$**	**№ вар.**	**Функция $Z(x, y)$**	**$M_0(x_0, y_0)$**
1	$Z = 4x - y^2$	$(1;-1)$	**3**	$Z = 2x + 4y$	$(1;-1)$
2	$Z = x - 4y$	$(2;1)$	**4**	$Z = y^2 + x$	$(-1;3)$

№ вар.	Функция $Z\ (x, y)$	$M_0\ (x_0, y_0)$	№ вар.	Функция $Z\ (x, y)$	$M_0\ (x_0, y_0)$
5	$Z = x^2 + y^2$	$(\sqrt{2};-\sqrt{2})$	**13**	$Z = x^2 + 2y^2$	$(0;-1)$
6	$Z = 3x^2 + y$	$(1;-2)$	**14**	$Z = 4x^2 - y^2$	$(-1;3)$
7	$Z = x + y$	$(0;1)$	**15**	$Z = 2y + x^2$	$(-2;2)$
8	$Z = x^2 + 2y^2$	$(\sqrt{2};0)$	**16**	$Z = x - 3y$	$(1;-1)$
9	$Z = x^2 - y^2$	$(2;0)$	**17**	$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$(0;-2)$
10	$Z = 2x^2 + y^2$	$(-1;1)$	**18**	$Z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$	$(-1;1)$
11	$Z = y^2 + 2x$	$(-2;2)$	**19**	$Z = 2x^2 + y$	$(2;-1)$
12	$Z = x^2 - 4y$	$(0;-1)$	**20**	$Z = \dfrac{y}{x^2}$	$(-2;1)$

Задание 3. Найти частные производные первого порядка от функции по каждому аргументу.

№ вар.	$Z(x,y)$ $Z'_x = ?\ Z'_y = ?$	$Z(x,y)$ $Z'_x = ?\ Z'_y = ?$	$u(x,y,z)$ $u'_x = ?\ u'_y = ?u'_z = ?$
1	$a)\, Z = x^2 - 4x\sqrt{y}$	á) $Z = \mathring{a}^{-3x}\cos(2x - y)$	в) $u = \dfrac{\operatorname{arctg} z}{x^2 - \ln y}$
2	$a)\, Z = 4xy^3 + \sqrt[8]{x^3}$	á) $Z = \mathring{a}^{4y}\ln\left(x^2 + y\right)$	в) $u = \dfrac{\sin\left(x^2 - z\right)}{y}$
3	$a)\, Z = 2x^3 + 2\sqrt{xy} - 1$	á) $Z = \sin 2x \cdot 2^{xy}$	в) $u = \dfrac{y^3 - 2x^3}{\ln z}$
4	$a)\, Z = x\left(x^2 - y\right) - \sqrt[3]{y}$	á) $Z = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\arcsin\dfrac{x}{y}$	в) $u = \dfrac{3^{x-y}}{\cos 2z}$
5	$a)\, Z = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2y}{x}$	á) $Z = x^2 \operatorname{ctg}\left(\dfrac{xy}{2}\right)$	в) $u = \dfrac{\ln\left(x^2 - y^2\right)}{e^z}$
6	$a)\, Z = y^2\left(x^3 + 2y\right) - xy^{-3}$	á) $Z = \sqrt{y}\ln\left(x^2 y\right)$	в) $u = \dfrac{x^2 - e^{3z}}{\cos 2y}$

№ вар.	$Z(x,y)$ $Z'_x=?$ $Z'_y=?$	$Z(x,y)$ $Z'_x=?$ $Z'_y=?$	$u(x,y,z)$ $u'_x=?$ $u'_y=?$ $u'_z=?$
7	$a)\ Z=x^5y^{-1}-3x^2\sqrt{y}$	$\acute{a})\ Z=\left(x^2+3y\right)^3$	$в)\ u=\frac{\cos\left(x+2y\right)}{x^2-e^z}$
8	$a)\ Z=\frac{3}{x^2}-\sqrt[3]{x^2y}$	$\acute{a})\ Z=y\sin^3 2x$	$в)\ u=\frac{e^y-z^3}{\ln 2y}$
9	$a)\ Z=\frac{x^2y}{2}-\frac{x}{y}$	$\acute{a})\ Z=\mathring{a}^{-x}\cos\left(3x+y^2\right)$	$в)\ u=\frac{\sqrt{x+3y}}{\ln z}$
10	$a)\ Z=\sqrt{xy^3}+x(1-y^2)$	$\acute{a})\ Z=\sqrt{x^3-\ln y}$	$в)\ u=\frac{e^{2z}}{x-\sqrt{y}}$
11	$a)\ Z=1-2x^2y+\sqrt[4]{xy}$	$\acute{a})\ Z=\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$	$в)\ u=\frac{\cos 3z}{x^2-y^2}$
12	$a)\ Z=\frac{1}{3}x^3y^3-\frac{2}{y}$	$\acute{a})\ Z=\cos^2 x\ln\left(x-2y\right)$	$в)\ u=\frac{\sin\left(yz\right)}{e^{-x}}$
13	$a)\ Z=x\sqrt{x^3y}-\frac{x^2}{y^2}$	$\acute{a})\ Z=4^{-y}\operatorname{tg}\left(xy^2\right)$	$в)\ u=\frac{\cos\left(x+3z\right)}{y^2}$
14	$a)\ Z=y^3+6x\sqrt{y}-5$	$\acute{a})\ Z=(3y-1)\arcsin\sqrt{x}$	$в)\ u=\frac{\ln 3z}{y^3-2x}$
15	$a)\ Z=x^2-3y+y\sqrt[3]{x}$	$\acute{a})\ Z=\sqrt{x^2+y^2}\ln x$	$в)\ u=\frac{\sin 4y}{x^2+e^{2z}}$
16	$a)\ Z=y\left(2x-y\right)+\sqrt[3]{x^2y}$	$\acute{a})\ Z=\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x-y^2}$	$в)\ u=\frac{\operatorname{tg}x\cdot e^y}{z}$
17	$a)\ Z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}$	$\acute{a})\ Z=x^3\operatorname{arctg}\left(y^2-x\right)$	$в)\ u=\frac{\sqrt{x-5y^2}}{z^3}$
18	$a)\ Z=\left(1-x^2\right)y^3+\sqrt{y}$	$\acute{a})\ Z=\cos\frac{2}{y}\cdot\arcsin\frac{y}{x}$	$в)\ u=\frac{\ln\left(y+3z\right)}{\operatorname{tg}4x}$
19	$a)\ Z=\frac{x}{2}-x\left(y^4+5\right)$	$\acute{a})\ Z=\arccos\frac{y+1}{x}$	$в)\ u=\frac{\cos x-y^2}{\sqrt{z}}$
20	$a)\ Z=2xy^3-\sqrt{x^3y^5}$	$\acute{a})\ Z=3^{-xy}+\cos^2\left(x-y\right)$	$в)\ u=\frac{\sin 3x+z}{\ln y}$

Задание 4. Вычислить полный дифференциал dz и полное приращение Δz функции $z = Z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ при указанных приращениях аргументов Δx и Δy. Оценить абсолютную и относительную погрешности приближенного равенства $\Delta z \approx dz$.

№ вар.	Z (x, y)	(x_0, y_0)	Δx	Δy
1	$Z = x^2y - x$	$(1,2)$	0,1	0,2
2	$Z = y^2x + 3y$	$(1,-1)$	0,2	0,1
3	$Z = x^2 + y^2 - xy$	$(0,2)$	0,1	– 0,2
4	$Z = x^2/y$	$(2,1)$	– 0,1	0,2
5	$Z = y^2/x$	$(2,-1)$	0,3	– 0,1
6	$Z = (x-3)/y$	$(-1,1)$	0,2	0,2
7	$Z = x^2 - 2yx$	$(-2,2)$	0,1	– 0,1
8	$Z = xy - x^2$	$(3,-1)$	– 0,2	– 0,1
9	$Z = 3x + 2y^2 + x^2$	$(-1,-1)$	0,2	– 0,2
10	$Z = \left(y^2+1\right)/x$	$(1,-2)$	– 0,2	0,1
11	$Z = y^2x + 2y$	$(1, -2)$	0,1	– 0,2
12	$Z = xy^2 + x^2$	$(-1, -1)$	– 0,2	0,2
13	$Z = y/x$	$(-1,3)$	0,2	– 0,1
14	$Z = x(x-y)^{-1}$	$(2,1)$	–1/3	$1/2$
15	$Z = x/y$	$(-2, 2)$	0,1	0,2
16	$Z = (x^2+y^2)^{-1}$	$(-1, 2)$	0,05	0,1
17	$Z = y^2 + xy$	$(2, -2)$	0,1	– 0,1
18	$Z = y(x+y)^{-1}$	$(-1, 2)$	0,1	– 0,1
19	$Z = 2x^2 - xy^2$	$(-1, -1)$	0,2	– 0,2
20	$Z = (x^2-1)y^{-1}$	$(2,1)$	0,1	0,2

Задание 5. Найти частные производные z'_x, z'_y от функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.

№ вар.	Уравнение $F(x, y, z) = 0$	№ вар.	Уравнение $F(x, y, z) = 0$
1	$z\ln(xy) + xe^{-2z} = 0$	11	$\sqrt{x} - \cos(y+z) - z^3 = 0$
2	$z^2 + \sin(yz) - x = 0$	12	$z^2 - \ln 2z + y^3x = 0$
3	$\cos(x-z) + yz^3 = 0$	13	$x^2 - z + \cos(3z - y) = 0$
4	$e^x\sin(y+z) - xz^2 = 0$	14	$z - y^2e^{xz} = 0$
5	$e^{xz} + y\ln z - x = 0$	15	$y\cos(xz) - x^2\ln z = 0$
6	$z^3x - \cos(yz^{-1}) = 0$	16	$z^2\sin 2y + e^{-xz} = 0$
7	$\sin(3x - 2z) + x^2yz = 0$	17	$z^3(x + \sin 2y) + \cos 3z = 0$
8	$e^{x-z} + z\ln 3y = 0$	18	$\ln 2x - y^2\cos\sqrt{z} = 0$
9	$z^3 - \mathrm{tg}(3z + x^2y^2) = 0$	19	$x^2\sin 3z + \ln(2y + z) = 0$
10	$ye^{2z} + x^2z - \ln y = 0$	20	$xyz^{-1} + 3^{y-2z} = 0$

Задание 6. Найти все частные производные второго порядка Z''_{xx}, Z''_{xy}, Z''_{yx}, Z''_{yy} от функции $z = Z(x, y)$.

№ вар.	$Z(x,y)$ $Z''_{xx}=?\ Z''_{xy}=?\ Z''_{yx}=?\ Z''_{yy}=?$	№ вар.	$Z = Z(x,y)$ $Z''_{xx}=?\ Z''_{xy}=?\ Z''_{yx}=?\ Z''_{yy}=?$
1	$z = e^{\frac{x}{y}}$	6	$z = e^{x^2y}$
2	$z = \sin(xy)$	7	$z = 2^{x^2-y}$
3	$z = x\sin^2 y$	8	$z = \ln(x^2 + y^2)$
4	$z = \cos(x^2 + y)$	9	$z = (3x - y^3)^{-1}$
5	$z = 3^x(y^2 - x)$	10	$z = \cos\dfrac{y^2}{x}$

№ вар.	$Z(x,y)$ $Z''_{xx}=?$ $Z''_{xy}=?$ $Z''_{yx}=?$ $Z''_{yy}=?$	№ вар	$Z(x,y)$ $Z''_{xx}=?$ $Z''_{xy}=?$ $Z''_{yx}=?$ $Z''_{yy}=?$
11	$z=y^{-2}\ln 2x$	**16**	$z=(x-y^2)e^{2x}$
12	$z=\cos(x^2-y^2)$	**17**	$z=y\cos^2 x$
13	$z=(x^2+2y)e^{-y}$	**18**	$z=\sin(y-x^2)$
14	$z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$	**19**	$z=x^3\ln 2y$
15	$z=(x^2-y)e^y$	**20**	$z=y^2(3x+1)^2$

Задание *7*. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в данной точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$.

№ вар.	Уравнение поверхности	$M_0\,(x_0, y_0, z_0)$
1	$x^3+y^3+z^3+xyz=6$	(1; 2;–1)
2	$xy^2+z^3=12$	(1; 2; 2)
3	$x^2y^2+2x+z^3=16$	(2; 1; 2)
4	$x+2y-\ln z+4=0$	(2; –3; 1)
5	$x^2-xy-8x+z+5=0$	(2; –3; 1)
6	$5x^2+2y^2-9-z=0$	(0; 1; –7)
7	$x^2+y^2+2z^2-10=0$	(1; –1; 2)
8	$3xy-x^2-5y^2-z=0$	(1; 0; –1)
9	$z=e^{4+x+2y}$	(2; –3; 1)
10	$(z-1)^2+3-x^2-y^2=0$	(0; –2; 2)
11	$x^2+y^2-2x-z^2=0$	(2; –1; 1)

№ вар.	**Уравнение поверхности**	$M_0\,(x_0, y_0, z_0)$
12	$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=6$	(2; 1; –2)
13	$xyz-16=0$	(2; –2; –4)
14	$z=\sqrt{x^2+y^2}-x$	(0; –2; 2)
15	$z=\sin x\cos y$	$\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right)$
16	$x^2+y^2+5xz=0$	$\left(2;-1;-\frac{1}{2}\right)$
17	$z=\sqrt{4-3x^2+y^2}$	(–1; 0; 1)
18	$z-x^2-y^2+3x=0$	(1; –2; 2)
19	$(z-2)^2+2-x^2-y^2=0$	(–1; 1; 2)
20	$z=x^3+y^3+3xy$	(1; –1; –3)

Задание 8. Вычислить производную функции $u = u\,(x, y, z)$ в точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\bar{s}$.

№ вар.	$u\,(x, y, z)$	$M_0\,(x_0, y_0, z_0)$	$\bar{s}$
1	$u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$	(2; 1; 2)	(2; 2; 1)
2	$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	(4; 3; 0)	(1; 2; 2)
3	$u=e^{xy}\left(z^2+z\right)$	(1; 0; 1)	(0; 3; 4)
4	$u=\sqrt{9-xyz}$	(1; 1; 5)	(2; 1; 2)
5	$u=x^3+y^2z$	(2; 3; 1)	(1; 1; 0)
6	$u=x^y+z^2$	(e; 1; 2)	(3; 0; 4)
7	$u=z^2\cdot e^{2x+y}$	(–1; 2; 1)	(0; 1; 0)
8	$u=z^2x+y^3-xy^2z$	(1; –1; 2)	(–3; 0; 4)

№ вар.	**u (x, y, z)**	**M_0 (x_0, y_0, z_0)**	$\bar{s}$
9	$u = x^2 - 3y + \ln z$	(2; –3; 1)	(–1; 1; 2)
10	$u = \left(3x^2 - z^2\right)e^{y-2}$	(1; 2; 1)	(–2; –2; 1)
11	$u = y^x + 2z$	(3; 2; –1)	(4; 3; 0)
12	$u = y^2 z + 2z^3 - x$	(1; 0; –2)	(–1; 1; 1)
13	$u = (3x - 1)e^{z+2y}$	(1; –1; 2)	(2; –1; –2)
14	$u = \ln\left(2x - y + z^2\right)$	(1; 5; 2)	(0; –3; 4)
15	$u = \sqrt{1 + 2x - y} - z^2$	(1;2; –1)	(–1; –1;0)
16	$u = x^3 - 3z^2 + 4y^2 z$	(–1; 1; 2)	(–2; –1; 2)
17	$u = x^2 y + yz - e^{xy}$	(0; 2; –1)	(1; 1; 3)
18	$u = \ln(x - y) + xz^2$	(2; 1; 1)	(–3; 0; 4)
19	$u = y^2 z + 3z^2 - 4xyz$	(3; 1; 1)	(1; –2; 2)
20	$u = \sqrt{5 - xyz}$	(–1; 1; –1)	(1; 1; 1)

Задание 9. Найти градиент скалярного поля $u = u\ (x, y, z)$ в точке M_0 (x_0, y_0, z_0), модуль градиента и объяснить физический смысл полученного результата.

№ вар.	**u (x, y, z)**	**M_0 (x_0, y_0, z_0)**
1	$u = \sin(xyz)$	$(1, \pi, 1)$
2	$u = xy^2 z$	$(2, 1, 1)$
3	$u = \ln\left(x^2 + yz\right)$	$(1, 2, 2)$
4	$u = \operatorname{arctg}(xyz)$	$(2, 1, 1)$
5	$u = \sqrt{9 - xyz}$	$(1, 1, 5)$

№ вар.	**u (x, y, z)**	**M_0 (x_0, y_0, z_0)**
6	$u=\ln\left(xy+z^2\right)$	$(2, 2, 2)$
7	$u=(3x-1)e^{z+2y}$	$(1,-1, 2)$
8	$u=x^2y+yz-e^{xy}$	$(0, 2,-1)$
9	$u=\operatorname{arctg}(xy)+z^2$	$(1,-1, 2)$
10	$u=x^2z+y^2-z^2xy$	$(1, 2,-1)$
11	$u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$	$(2, 1, 2)$
12	$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$(4, 3, 0)$
13	$u=e^{x^2+y^2}\left(z^2+1\right)$	$(1, 0, 2)$
14	$u=e^{xy}\left(z^2+z\right)$	$(1, 0, 1)$
15	$u=\sin(xy)+z^3$	$(\pi, 2, 1)$
16	$u=x^y+z^2$	$(e, 1, 2)$
17	$u=x^2-3y^2+\ln z^2$	$(2,-3,1)$
18	$u=\left(x^2+y^2\right)e^{z-1}$	$(-1, 2, 1)$
19	$u=\cos(x-y)+z^3$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$
20	$u=(2z+1)e^{x-2y}$	$(2, 1,-1)$

Задание 10. Исследовать на экстремум функцию $Z = Z(x, y)$.

№ вар.	**Z (x, y)**	№ вар.	**Z (x, y)**
1	$z=x^2+xy+y^2-2y-y$	**3**	$z=x^4-2x^2+y^2+2y+3$
2	$z=1+6x-x^2-xy-y^2$	**4**	$z=\left(x^2+y\right)e^{\frac{y}{2}}$

№ вар.	Z (x, y)	№ вар.	Z (x, y)
5	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$	**13**	$z = x^3 - y^3 - 3xy$
6	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$	**14**	$z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$
7	$z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$	**15**	$z = 1 + 2x - 4y - x^2 - y^2$
8	$z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$	**16**	$z = 2xy - 4x - 2y$
9	$z = x^2 + y^2 + 4y - 2x + 4$	**17**	$z = x^2 + y^2 + \frac{(x + 2y - 16)^2}{5}$
10	$z = x^2 - 2xy + 4y$	**18**	$z = (y - x)^2 + (y + 2)^2$
11	$z = e^{\frac{x}{2}}\left(x - y^2\right)$	**19**	$z = xy(1 - x - y)$
12	$z = x^3 + xy + 6x + y + 1$	**20**	$z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$

Образец билета для защиты темы

1.Найти dV, если $V = 7\cos(x^2 y) + \arcsin(5s) - \frac{7x}{s}$;

2. Найти частные производные z'_x, z'_y, если $\ln\left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x}\right) + z^5 x = 2y - 6$

3. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 y + y^3 - 5$ в точке $M_0(-3;1;7)$;

4. Найти градиент функции $u = xy^3 - z^2\ x + 4y$ в точке $M_0(2;1;-1)$;

5. Исследовать функцию на экстремум $z = -y^2 + xy + 8y\ - 2x^2$.

Задание 11. Найти экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны соотношением $ax + by - c = 0$ и определить является ли экстремум максимумом или минимумом функции.

Номер варианта	*a*	*b*	*c*
1	3	–2	1
2	4	–1	3
3	5	1	8

4	3	–2	2
5	5	1	9
6	7	–2	2
7	2	3	6
8	3	2	8
9	4	–2	2
10	2	3	4
11	4	–1	3
12	5	2	3
13	3	1	7
14	3	–2	5
15	5	–2	2
16	3	–2	1
17	2	1	8
18	4	1	6
19	1	–1	3
20	2	4	7

Образцы билетов для защиты темы

Билет 1

1.Найти dV, если $V = 7\cos(x^2 y) + \arcsin(5s) - \dfrac{7x}{s}$;

2. Найти частные производные z'_x, z'_y, если $\ln\left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{y}{x}\right) + z^5 x = 2y - 6$

3. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 y + y^3 - 5$ в точке $M_0(-3;1;7)$;

4. Найти градиент функции $u = xy^3 - z^2\ x + 4y$ в точке $M_0(2;1;-1)$;

5. Исследовать функцию на экстремум $z = -y^2 + xy + 8y - 2x^2$.

Билет 2

1. Найти dz, если $z = 3x^5 y^2 + tg(xt) - e^{\frac{t}{y}}$;

2. Найти частные производные z'_x, z'_y, если $\sin(x + 7z) + 6y - 3x^2 z = 2z^4 - 5$;

3. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + y^3 - 5x$ в точке $M_0(2;-1;6)$;

4. Найти градиент функции $u = 3xz - 4y\ x - z^3$ в точке $M_0(1;2;-1)$;

5. Исследовать функцию на экстремум $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

Билет 3

1.Найти dV, если $V = 7\cos(x^2 y) + \arcsin(5s) - \dfrac{7x}{s}$;

2. Найти частные производные z'_x, z'_y, если $\ln\left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{y}{x}\right) + z^5 x = 2y - 6$

3. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2y + y^3 - 5$ в точке $M_0(-3;1;7)$;

4. Найти градиент функции $u = xy^3 - z^2\ x + 4y$ в точке $M_0(2;1;-1)$;

5. Исследовать функцию на экстремум $z = -y^2 + xy + 8y\ - 2x^2$.

Линейное программирование

1) Решить графически и симплекс- методом исходную задачу.
2) Сформулировать двойственную ей задачу, используя теоремы двойственности, найти её оптимальный план.

Варианты исходной задачи:

$$1)\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

$$L = x_1 + 3x_2 \to \max.$$

$$2)\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 - 2x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

$$L = x_1 + 3x_2 \to \max.$$

$$3)\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

$$L = 2x_1 + 2x_2 \to \max.$$

$$4)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

$$L = x_1 + x_2 \to \max.$$

$$5)\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

$$L = x_1 + 3x_2 \to \max.$$

$$6)\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

$$L = x_1 - 3x_2 \to \min.$$

$$7)\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -5, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

$$L = -2x_1 + x_2 \to \min.$$

$$8)\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$$

$$L = -2x_1 + x_2 \to \min.$$

$$9)\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \end{cases}$$

$$10)\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$

$L = 4x_1 + x_2 \to \min.$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$

$L = 5x_1 + x_2 \to \min.$

$$11)\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$

$L = x_1 + 3x_2 \to \max.$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) ДГТУ в г. Азове

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

«ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА»

Азов
2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Любая финансовая, кредитная или коммерческая операция предполагает совокупность условий, согласованных её участниками. Совместное влияние на финансовую операцию многих факторов делает конечный ее результат неочевидным. Для его оценивания необходим специальный количественный анализ. Именно поэтому, такие операции могут и должны являться предметом количественного финансового анализа. Совокупность методов расчета и составляет предмет курса «Финансовая математика».

В рамках данного курса рассматриваются методы финансово-экономических расчетов для решения широкого круга задач от элементарного начисления процентов до анализа сложных инвестиционных, кредитных и коммерческих операций.

Цель курса состоит в изучении методов количественного анализа, необходимых для принятия финансовых решений в условиях современного рынка.

В процессе изучения курса «Финансовая математика» решаются следующие задачи:

1. Овладение основными принципами и методами анализа одиночных выплат и потоков платежей;
2. Понимание финансовой эквивалентности платежей;
3. Изучение современных моделей оценивания производных финансовых инструментов;
4. Применение изученных методов при анализе ценных бумаг, при решении кредитных и коммерческих задач.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДИСЦИПЛИНЫ

Предмет финансовой математики

Финансовая математика – это дисциплина, в рамках которой изучаются методы математических расчётов, применяемых в финансовых операциях.

Объектом изучения являются любые финансово-кредитные операции, которые предполагают наличие ряда условий, с которыми согласны участвующие стороны. К таким условиям относятся:

– денежные суммы;
– временные параметры;
– процентные ставки и некоторые другие дополнительные величины.

Каждая из перечисленных характеристик может быть представлена самым различным способом.

1) платежи могут быть:
   – разовые;
   – в рассрочку;
   – постоянные;
   – переменные и т.д.
2) время может обозначать:
   – общий срок операции;
   – интервалы поступления платежей;
   – момент погашения задолженности.
3) процентные ставки бывают:
   – фиксированные;
   – переменные;
   – номинальные;
   – эффективные и т.д.

В рамках одной операции эти параметры образуют некоторую взаимосвязанную систему. Множественность параметров этой системы, приводит к тому, что конечные результаты операций (кроме элементарных) часто не очевидны. Более того, изменение значения хотя бы одной величины в системе, обязательно скажется на финансовых результатах соответствующей операции. В связи с этим возникает потребность в количественном финансовом анализе таких операций.

К основным задачам финансовой математики относятся следующие:

1) измерение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих сторон;
2) разработка планов выполнения финансовых операций, в том числе планов погашения задолженности;
3) измерение зависимости конечных результатов операции от основных ее параметров;
4) расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции.

При анализе финансовых операций необходимо учитывать влияние фактора времени на денежные суммы. *Фактор времени* особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда даже большую роль, чем размер денежных сумм.

Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности финансирования, кредитования и инвестирования и выражается в первом принципе финансовой математики.

Первый принцип финансовой математики: *принцип неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени.* Т.е. две одинаковые по абсолютной величине, но разновременные суммы – неравноценны. Это обусловлено, во-первых, способностью денег приносить доход, а во-вторых, влиянием инфляции.

Из первого принципа финансовой математики следует, что неправомерно сравнивать денежные суммы, относящиеся к разным моментам времени.

Для сравнения денежных сумм, полученных или затраченных в разные моменты времени их необходимо привести к одному моменту времени (базовой дате). Приведение осуществляется наращением, если базовая дата относится к будущему или дисконтированием – приведение к более ранней дате (рис. 1).

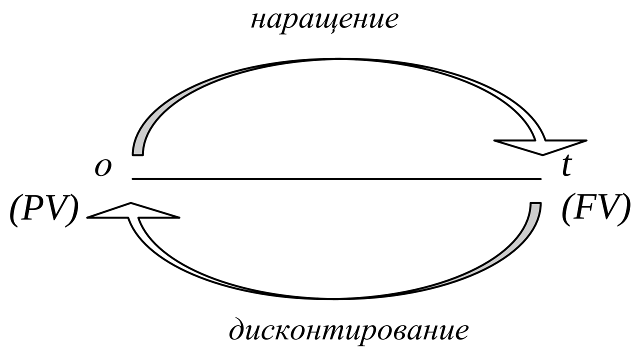


Рис. 1. Приведение денежных сумм

PV (present value) – текущая (современная) величина денежной суммы;
FV (future value) – будущая (наращенная) величина денежной суммы;
D = (FV – PV) – дисконт.

Второй принцип финансовой математики: *принцип финансовой эквивалентности,* который предполагает равенство (эквивалентность) финансовых обязательств, сторон принимающих участие в операции. Этот принцип позволяет изменять условия контрактов без нарушения принятых обязательств.

Основные понятия

<u>*Проценты*</u> (процентные деньги) – абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме:
– выдача ссуды;
– продажа товара в кредит;
– помещение денег на депозитный счет и т.д.

Процентная ставка – относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени – отношение дохода (процентных денег) к основной сумме долга.

Период начисления – временной интервал, к которому приурочена процентная ставка (чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками).

Проценты согласно договорённости между кредитором и заёмщиком выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга.

Капитализация процентов – это присоединение начисленных процентов к основной сумме долга.

Наращение – процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов.

Дисконтирование (сокращение) – это процесс уменьшения суммы денег, относящейся к будущему, в связи с учётом процентов.

Дисконт (скидка) – величина учтённых процентов.

Любая из операций, как наращения, так и дисконтирования, невозможна без применения определенного уровня процентной ставки и схемы начисления процентов. Начисление процентов возможно по схеме простого процента, либо по схеме сложного процента.

Проценты

Простые применяются для краткосрочных операций

Сложные применяются в средне- и долгосрочных операциях

Процессы начисления простых и сложных процентов будут рассмотрены в следующих разделах.

Контрольные вопросы

1. Объект, предмет, цели и задачи курса.
2. Основные понятия дисциплины.
3. Концепция изменения стоимости денег во времени.

1.1. Тема 1 «Наращение по простым процентам»

При наращении по простым процентам, начисленные проценты не присоединяются к основной сумме долга, а периодически выплачиваются. База для начисления процентов остается постоянной, и процесс роста исходной суммы происходит равномерно.

По определению, *наращенная сумма* – это первоначальная сумма с начисленными к концу срока процентами. В случае начисления простых процентов, наращенная сумма определяется по формуле:

$$FV = PV(1 + nr), \tag{1}$$

где PV – первоначальная сумма долга; FV – наращенная сумма, т.е. сумма в конце срока; r – ставка наращения процентов (десятичная дробь); n – срок ссуды.

$(1+nr)$ – *<u>множитель наращения</u>* простых процентов, который показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

Если срок операции n выражен в днях, а процентная ставка годовая, то n можно представить в виде дроби:

$$n = \frac{t}{K}, \tag{2}$$

где t – число дней ссуды; K – *временная база начисления процентов.*

Тогда формула наращения простых процентов примет вид:

$$FV = PV(1 + \frac{t}{K} r). \tag{3}$$

При расчете простых процентов применяют два вида временной базы.

<u>Временная база</u>

K_1**=365, 366** дней	K_2**=360** дней (12 месяцев по 30 дней)
<u>точные проценты</u>	***<u>обыкновенные проценты</u>***

Число дней операции t может быть:

– ***точное***, рассчитанное строго по календарю;

– ***приближенное***, определяется исходя из предположения, что все месяцы в году равны между собой (по 30 дней).

В зависимости от применяемой временной базы и способа расчета t, возможны <u>три варианта расчета простых процентов:</u>

1. Английская методика:
(365/365) – точные проценты с точным числом дней ссуды;
2. Французская методика:
(360/365) – обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;
3. Германская методика:
(360/360) – обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Переменные (плавающие) ставки

В некоторых случаях в кредитных соглашениях предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае в контракте указывается не сама ставка, а база (базовая ставка) и размер надбавки к ней (маржа). Наращенная сумма по переменным ставкам определяется по формуле (4):

$$FV = PV(1 + n_1 r_1 + n_2 r_2 + ... + n_t r_t + ... + n_m r_m) = PV(1 + \sum_t n_t r_t), \tag{4}$$

где r_t – ставка простых процентов в периоде t; n_t – продолжительность периода с постоянной ставкой, $n = \sum_t n_t$.

Контрольные вопросы

1. Как изменяется базовая сумма при начислении простых процентов?
2. Формула наращения по простой процентной ставке;
3. Что такое множитель наращения и что показывает?
4. Методики начисления простых процентов;
5. Что такое переменные (плавающие) ставки, формула наращения.

1.2. Тема 2 «Наращение по сложным процентам»

При использовании схемы сложного процента, начисленные проценты не выплачиваются сразу, а присоединяются к основной сумме долга. Т. е. проценты начисляются и на начисленные проценты – цепной процесс. В этом случае, база для начисления процентов увеличивается с каждым шагом во времени и процесс увеличения исходной суммы происходит с ускорением.

Формула наращения по сложным процентам имеет следующий вид:

$$FV = PV(1+r)^n, \tag{5}$$

где PV – первоначальная сумма; FV – наращенная сумма, т.е. сумма в конце срока; r – сложная процентная ставка (десятичная дробь); n – срок операции.

Величину $(1+r)^n$ называют *множитель наращения* по сложным процентам.

1.2.1. Переменные ставки сложных процентов

При наращении по сложным процентам в некоторых случаях применяются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки (плавающие ставки). В этом случае общий множитель наращения равен произведению частных множителей, и формула наращения имеет вид:

$$FV = PV(1+r_1)^{n_1}(1+r_2)^{n_2}...(1+r_k)^{n_k}, \tag{6}$$

где $r_1, r_2, ..., r_k$ – последовательное значение ставок; $n_1, n_2, ..., n_k$ – периоды, в течение которых «работают» эти ставки.

1.2.2. Начисление процентов m раз в год

В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам и т.д. В этом случае, для наращения применяется номинальная процентная ставка.

Номинальная ставка (j) – годовая ставка сложных процентов, доход по которой начисляется несколько m раз в год.

Т. е. каждый раз проценты начисляются по ставке j/m, а общее количество периодов наращения равно $m \cdot n$, и начисление процентов по номинальной ставке осуществляется по следующей формуле:

$$FV = PV\left(1+\frac{j}{m}\right)^N, \tag{7}$$

где, j – номинальная процентная ставка; N – общее количество периодов начисления $(N = mn)$; m – количество раз начисления процентов в год.

Существует эффективная ставка эквивалентная номинальной.

Эффективная ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m - разовое начисление процентов в течение года по ставке j/m.

Эти ставки (номинальная и эффективная) ***эквивалентны*** в финансовом отношении, и могут заменять друг друга в рамках одной операции!

Эквивалентные ставки – это, ставки которые дают одинаковый результат за один и тот же промежуток времени.

Соотношение эквивалентности можно получить для любой пары ставок из равенства соответствующих множителей наращения.

Соотношение эквивалентности для эффективной и номинальной ставки имеет следующий вид:

$$(1+r)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}. \qquad (8)$$

Отсюда, зная номинальную ставку можно определить эквивалентную ей эффективную ставку:

$$r = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1, \qquad (9)$$

и наоборот, зная эффективную ставку, можно вычислить номинальную ставку при m - разовом начислении процентов в год по формуле (10):

$$j = m\left(\sqrt[m]{1+r} - 1\right). \qquad (10)$$

Контрольные вопросы

1. Как изменяется база для начисления процентов при использовании схемы сложных процентов?
2. Что такое номинальная ставка, формула наращения по ней, в каких случаях применяется?
3. Понятие эффективной ставки;
4. Эквивалентность номинальной и эффективной ставки.

1.3. Тема 3 «Простые и сложные проценты»

1.3.1. Сравнение процесса роста по простым и сложным процентам

Для сравнения процесса роста исходной суммы по простым и сложным процентам достаточно сравнить соответствующие множители наращения. При одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока.

Примем следующие обозначения:

r_s – ставку простых процентов (s «simple» – простой);

$(1+nr_s)$ – множитель наращения по простым процентам;

$(1+r)^n$ – множитель наращения по сложным процентам.

Если ставки годовые и срок выражен в годах, тогда:

– для срока $n<1$ простые проценты больше сложных: $(1+nr_s)>(1+r)^n$;

– для срока $n>1$ сложные проценты больше простых: $(1+nr_s)<(1+r)^n$;

– для срока $n=1$, множители наращения равны друг другу.

Представим графически процессы роста исходной суммы по простым и сложным процентам (рис. 2).

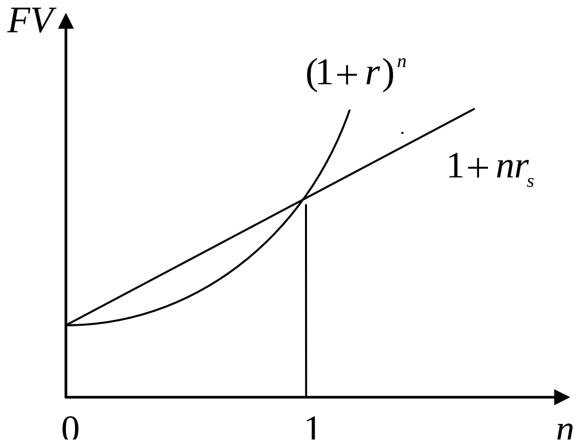


Рис. 2. Сравнение процесса роста по простым и сложным процентам

Аналогичные соотношения имеют место и при наращении процентов по периодам менее одного года. В этом случае r означает ставку за период, n – величину периода наращения. Например, если r – ставка за квартал, то при ежеквартальном начислении процентов для срока менее одного квартала простые проценты будут больше сложных.

1.3.2. Формулы удвоения

Более наглядно охарактеризовать влияние простой и сложной ставки можно, сопоставляя числа лет, необходимые для удвоения первоначальной суммы.

Формулы удвоения по простым и сложным процентам можно получить из соответствующих формул наращения (1) и (5), подставив $FV=2PV$. Тогда получаем формулы удвоения в виде:

– по простым процентам:

$$n=\frac{1}{r_s}, \tag{11}$$

– по сложным процентам:

$$n=\frac{\ln 2}{\ln(1+r)}=\frac{0{,}69315}{\ln(1+r)}, \tag{12}$$

где r_s – простая процентная ставка; r – сложная процентная ставка.

1.3.3. Начисление процентов за дробное число лет

В этом случае срок необходимо разложить на две составляющие: выделить целое количество периодов наращения и дробную часть одного такого периода, т. е. представить в виде:

$$n = n_1 + n_2, \tag{13}$$

где n_1 – количество целых периодов начисления; n_2 – дробная часть одного периода начисления.

Для расчета накопленной суммы, при начислении процентов за дробное число лет используются две схемы.

Схема сложного процента

В этом случае проценты за весь срок операции начисляются по сложным процентам, и накопленная сумма определяется по формуле:

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_1+n_2}, \tag{14}$$

где r – сложная годовая процентная ставка; m – количество раз начисления процентов в год.

Смешенная схема

По смешенной схеме за целое количество периодов наращения начисляются сложные проценты, за дробную часть периода – простые, по формуле:

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_1} \cdot \left(1+\frac{r}{m}\cdot n_2\right). \tag{15}$$

Контрольные вопросы

1. Соотношение между простыми и сложными процентами;
2. Что показывают формулы удвоения?
3. В чем заключается смешенная схема начисления процентов.

1.4. Тема 4 «Дисконтирование»

Дисконтирование – нахождение величины денежной суммы на заданный момент времени t по известному или предполагаемому значению в будущем, исходя из значения процентной ставки.

В зависимости от вида применяемой ставки возможны два способа дисконтирования.

Дисконтирование

Математическое дисконтирование	Банковский учёт
(применяется процентная ставка, r)	(применяется учётная ставка, d)

1.4.1. Математическое дисконтирование

Задача, в этом случае формулируется так: какую первоначальную сумму ссуды надо выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму FV, при условии, что на долг начисляются проценты по ставке r?

Математическое дисконтирование по простым процентам

На основании формулы наращения простых процентов (1) получаем формулу математического дисконтирования в виде:

$$PV = \frac{FV}{1+nr}, \tag{16}$$

где $\frac{1}{1+nr}$ – *дисконтный множитель*, который показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

Математическое дисконтирование по сложным процентам

Дисконтирование по сложным процентам осуществляется с замедлением, т.к. каждый раз ставка применяется к сумме, дисконтированной на предыдущем этапе во времени. Обратившись к формуле наращения сложных процентов (5), получим формулу математического дисконтирования по сложным процентам:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n}, \tag{17}$$

где $\frac{1}{(1+r)^n}$ – *дисконтный, учетный* или *дисконтирующий множитель* сложных процентов.

Для случаев, когда проценты начисляются m раз в год, формула математического дисконтирования будет следующей:

$$PV = \frac{FV}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}, \tag{18}$$

где $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}$ – дисконтный множитель сложных процентов.

1.4.2. Банковский учёт

Банковский учёт применяется при покупке (учёте) векселей.

Банк или другое финансовое учреждение до начала срока платежа по векселю приобретает (учитывает) его у владельца по цене, которая меньше цены указанной на векселе, т.е. покупает его с дисконтом. Получив при наступлении срока платежа по векселю деньги, банк реализует свой процентный доход в виде дисконта. В свою очередь владелец векселя с помощью его продажи (учёта) имеет возможность получить деньги хотя и не в полном объеме, однако ранее указанного срока.

Банковский учёт по простым процентам

В случае учета проценты учитываются с суммы, проставленной в векселе, и текущая сумма долга по векселю определяется по формуле:

$$PV = FV - FVnd = FV(1 - nd), \qquad (19)$$

где d – простая годовая учетная ставка; n – срок от момента учета до даты погашения векселя (в годах); $(1 - nd)$ – дисконтный множитель.

Разность $FV - PV$, в случае, когда PV определено дисконтированием, называют *дисконтом* (D) и рассчитывается по формуле:

$$D = FV - PV \qquad (20)$$

Учет по сложной учетной ставке

В этом случае для дисконтирования применяется сложная учётная ставка d. Формула учёта по сложным процентам имеет следующий вид:

$$PV = FV(1 - d)^n, \qquad (21)$$

где d – сложная годовая учетная ставка.

Также как и наращение по сложным процентам, дисконтирование может производиться не один, а m раз в год по номинальной учетной ставке f.

Номинальная учётная ставка – это годовая ставка сложных процентов, по которой учёт процентов осуществляется несколько раз в год.

Формула учёта по номинальной учётной ставке имеет вид:

$$PV = FV\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}, \qquad (22)$$

где f – *номинальная годовая учетная ставка*.

Существует эффективная учётная ставка эквивалентная номинальной учетной ставке. ***Эффективная учётная ставка*** (d) характеризует степень дисконтирования в целом за год.

Эти ставки (номинальная и эффективная) эквивалентны в финансовом отношении, т. е. дают одинаковый результат за один и тот же промежуток времени, и определяются на основании равенства соответствующих дисконтных множителей (формула (23)):

$$(1 - d)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}, \qquad (23)$$

отсюда, эффективная учётная ставка равна:

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m, \qquad (24)$$

а номинальная учётная ставка равна:

$$f = m\left(1 - \sqrt[m]{1 - d}\right). \qquad (25)$$

Наращение по учётной ставке

Бывают ситуации когда, необходимо определить сумму, которую надо проставить в векселе, если известна текущая сумма долга. В этом случае применяется наращение по учетной ставке.

Наращенная сумма по простой учетной ставке определяется на основании формулы учета (19), в соответствии с выражением (26):

$$FV = PV\frac{1}{1-nd}, \tag{26}$$

где $\frac{1}{1-nd}$ – множитель наращения по простой учетной ставке.

Сложная учётная ставка также применяется для наращения. Формулы наращения по сложным учётным ставкам выглядят следующим образом:

$$FV = \frac{PV}{(1-d)^n} = PV\frac{1}{(1-d)^n}, \tag{27}$$

где $\frac{1}{(1-d)^n}$ – множитель наращения по сложной учетной ставке.

$$FV = \frac{PV}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}, \tag{28}$$

где $\frac{1}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}}$ – множитель наращения по номинальной учетной ставке.

Контрольные вопросы

1. Что такое дисконтирование?
2. Математическое дисконтирование;
3. Банковский учет;
4. Что показывает дисконтный множитель?
5. Номинальная учетная ставка;
6. Понятие эффективной учетной ставки;
7. Соотношение эквивалентности эффективной и номинальной учетных ставок;
8. Наращение по простой и сложной учетным ставкам?

1.5. Тема 5 «Изменение условий коммерческих сделок»

Конверсия платежей – это изменение условий платежей.

На практике часто возникают случаи, когда необходимо заменить одно денежное обязательство другим, или объединить несколько платежей в один – консолидация и т.п. Изменение любого параметра в рамках одной операции обязательно повлечёт за собой изменение остальных параметров.

Общепринятым принципом в этих случаях является *принцип финансовой эквивалентности обязательств*, который позволяет изменять условия коммерческих сделок без нарушения прав и обязанностей каждой из участвующих сторон. На принципе эквивалентности основывается сравнение разновременных платежей.

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи приведенными, к одному моменту времени (базовой дате), оказываются равными.

Приведение осуществляется путем дисконтирования – приведение к более ранней дате, или наращения суммы платежа, если эта дата относится к будущему.

Для краткосрочных обязательств приведение осуществляется на основе простых процентов, для средне- и долгосрочных – с помощью сложных процентов.

При изменении условий платежей общий метод решения заключается в разработке так называемого ***уравнения эквивалентности***, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к этой же дате.

Консолидация задолженности

Частным случаем конверсии платежей является ***консолидация задолженности*** – объединение нескольких платежей в один.

В случае консолидации платежей решение также заключается в составлении уравнения эквивалентности, при этом возможны две постановки задачи:

1) определение ***размера*** консолидированного платежа (FV_o), если известен срок этого платежа. В этом случае, при составлении уравнения эквивалентности, приведение удобнее осуществлять на дату неизвестного платежа.
2) определение ***срока*** консолидированного платежа (n_o), если известна сумма платежа. В этом случае уравнение эквивалентности удобно представить в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей, т.е. базовой датой будет являться нулевой момент времени.

Контрольные вопросы

1. Что такое конверсия платежей?
2. Что такое консолидация задолженности?
3. В чем заключается общий метод решения задач на конверсию платежей;
4. Сущность уравнения эквивалентности.

1.6. Тема 6 «Потоки платежей»

1.6.1. Виды потоков платежей и их параметры

Поток платежей – ряд доходов или выплат, происходящих в разные моменты времени.

Из определения следует, что платежи могут быть:

– *положительные* – входящие по отношению к инвестору, например, периодическое получение доходов от инвестиций;
– *отрицательные* – исходящие, например, погашение задолженности в рассрочку, выплаты пенсии и т.д.

Потоки платежей бывают:

– *нерегулярные* – выплаты могут быть как положительные, так и отрицательные, и происходят через разные промежутки времени;
– *регулярные* – размеры платежей постоянные происходящие через равные промежутки времени (***финансовая рента*** или ***аннуитет***).

Финансовые ренты описываются следующими <u>*основными параметрами*</u>:

1. *член ренты* – размер отдельного платежа;
2. *период ренты* – временной интервал между двумя последовательными платежами;
3. *срок ренты* – это время от начала реализации ренты до момента выплаты последнего платежа;
4. *процентная ставка* – это процентная ставка, которая используется для расчета текущей и будущей стоимости платежей, составляющих ренту (как правило, это сложная ставка).

<u>*Дополнительные параметры потоков платежей*</u>:

1. *количество платежей:*
   – конечное число выплат (*ограниченные ренты*);
   – бесконечное (*бесконечные* или *вечные ренты* – срок операции весьма продолжителен и не оговаривается конкретными датами).
2. *момент реализации ренты:*
   – немедленный (*немедленные ренты* – выплаты начинаются сразу после заключения контракта);
   – отложенный *(отсроченные* или *отложенные ренты).*
3. *число платежей в течение года:*
   – один раз в году (*годовые ренты*);
   – p-раз в году (p-*срочные ренты*).
4. *начисление процентов:*
   – один раз в году;
   – m-раз в году;
   – непрерывно (за бесконечно малые промежутки времени).
5. *момент платежа:*
   – в начале периода (*рента пренумерандо*);
   – в середине периода;
   – в конце периода (*обыкновенные ренты или постнумерандо*).
6. *величина выплат (членов ренты):*
   – одинаковая (*постоянные ренты*);
   – переменная (*переменные ренты*).

7. вероятность выплаты ренты:

– безусловная выплата, например, погашение кредита (*верная рента*);

– в зависимости от наступления некоторого случайного события, например, страховые аннуитеты (*условная рента*).

<u>Существуют также две обобщающие характеристики потоков платежей:</u>

1. *Текущая (современная) стоимость* *потока платежей* (PVA) – это сумма всех выплат, дисконтированных на нулевой момент времени (рис. 3).

Для потоков платежей при начислении процентов, в большинстве случаев, используется схема сложного процента.

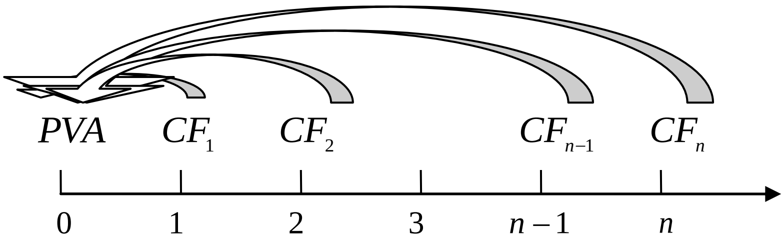


Рис. 3. Текущая стоимость потока платежей

Для расчета текущей стоимости потока платежей необходимо дисконтировать все платежи на нулевой момент времени, т. е. умножить на соответствующие дисконтные множители.

$\frac{1}{(1+r)^n}$ – множитель дисконтирования по сложным процентам.

Следовательно, текущую стоимость годовой ренты с неравными платежами можно рассчитать по формуле:

$$PVA = \frac{CF_1}{(1+r)^1} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{CF_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} + \frac{CF_n}{(1+r)^n}, \qquad (29)$$

где, PVA – современная стоимость потока платежей; CF_n – член ренты; n – общий срок выплат; r – сложная годовая процентная ставка.

2. *Наращенная (будущая) стоимость* *потока платежей* (FVA) – это сумма всех платежей с начисленными на них к концу срока процентами, т. е. приведенных к моменту последнего платежа (рис. 4).

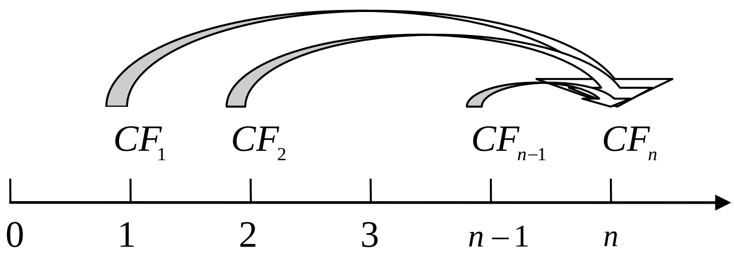


Рис. 4. Будущая стоимость потока платежей

Для расчета будущей стоимости потока платежей, все платежи необходимо привести к дате, относящейся к будущему (наращением), т. е. умножить на соответствующие множители наращения.

Тогда будущая стоимость годовой ренты с неравными платежами может быть определена в соответствии с выражением (30):

$$FVA = CF_1 (1+r)^{n-1} + CF_2 (1+r)^{n-2} + ... + CF_{n-1} (1+r) + CF_n , \qquad (30)$$

где FVA – будущая стоимость потока платежей.

1.6.2. Обыкновенный аннуитет (постоянная рента постнумерандо)

Обыкновенный аннуитет **–** это ряд однонаправленных платежей одинаковой величины, происходящих через равные промежутки времени в конце периода.

Из определения следует, что для обыкновенного аннуитета все платежи равны между собой, т.е. $CF_1 = CF_2 = CF_3 = ...CF_{n-1} = CF_n$. С учетом этого, выражения (29) и (30) представляют собой геометрическую прогрессию. Очевидно, текущая и будущая стоимость обыкновенного аннуитета равна сумме членов соответствующей прогрессии, откуда:

– *современная (текущая) стоимость обыкновенного аннуитета* равна*:*

$$PVA = CF \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \qquad (31)$$

– *наращенная (будущая) стоимость обыкновенного аннуитета* равна*:*

$$FVA = CF \frac{(1+r)^{n}-1}{r} \qquad (32)$$

Обыкновенный аннуитет с начислением процентов m ***раз в год и выплатами*** p ***раз в год равными суммами***

При расчёте текущей и будущей стоимости потока платежей возможно начисление процентов несколько (m) раз в год по ставке (j/m). Платежи также могут осуществляться не один, а несколько (p) раз в год равными частями. Такой поток платежей называется p - срочная рента с начислением процентов m раз в год по номинальной ставке j.

В этом случае формулы (31) и (32) преобразуются следующим образом:

1) годовой платеж разбивается на p равных частей, следовательно, величина отдельного члена ренты равна CF/p;

2) в числителе начисление процентов вместо эффективной ставки r осуществляется уже по номинальной ставке j/m, соответственно в степени подставляем общее количество периодов наращения равное $m \cdot n$;

3) в знаменатель подставляем эффективную ставку эквивалентную начислению процентов m раз в год по номинальной ставке j/m, которую можно получить из равенства соответствующих множителей наращения:

$$(1+r)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn},$$

но, поскольку платежи осуществляются с периодичностью p - раз в год, следовательно, вместо числа лет необходимо взять общее число периодов выплат ренты – $n \cdot p$, тогда соотношение эквивалентности будет следующим:

$$(1+r)^{np} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn},$$

извлекая из левой и правой части этого выражения корень степени np:

$$(1+r) = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}},$$

отсюда эффективная ставка равна:

$$r = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1.$$

Если $p \neq m$, то имеют место следующие формулы:

– текущая стоимость p *- срочной ренты:*

$$PVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m/p}-1}. \quad (33)$$

– будущая стоимость p *- срочной ренты:*

$$FVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}; \quad (34)$$

Периодический взнос на погашение кредита

Задача заключается в следующем: необходимо определить величину самого аннуитета (платежа или поступления), если известна его текущая стоимость, число взносов и ставка дохода. Величина годового взноса определяется на основании выражения (31) по формуле:

$$CF = \frac{PVA}{1-(1+r)^{-n}} \cdot r, \quad (35)$$

где PVA – текущая стоимость потока платежей (сумма, выданная в кредит – тело кредита); CF – периодический годовой взнос на погашение кредита; n – общий срок выплат (количество платежей).

Если платежи осуществляются несколько раз в год, то периодический взнос на погашение кредита рассчитывается на основании формулы (33) в соответствии с выражением:

$$\frac{CF}{p} = \frac{PVA}{1-(1+j/m)^{-mn}} \cdot \left[(1+j/m)^{m/p} - 1\right], \tag{36}$$

где p – количество взносов в год.

Периодический взнос в фонд накопления

Требуется рассчитать величину периодически вносимой суммы, необходимой для накопления нужной стоимости при заданной ставке процентов. Величина годового взноса определяется на основе выражения (32) по формуле:

$$CF = \frac{FVA}{(1+r)^n - 1} \cdot r, \tag{37}$$

где FVA – будущая стоимость потока платежей (накопленная сумма – величина фонда в конце срока); CF – годовой взнос в фонд накопления; n – общий срок выплат (количество взносов).

Если взнос в фонд накопления осуществляется несколько раз в год, то величина периодического взноса рассчитывается по формуле:

$$\frac{CF}{p} = \frac{FVA}{(1+j/m)^{mn} - 1} \cdot \left[(1+j/m)^{m/p} - 1\right]. \tag{38}$$

1.6.3. Другие виды аннуитета

На практике также применяются и другие виды потоков платежей.

Рента пренумерандо

Рента пренумерандо – это рента с платежами в начале периодов.

Следовательно, каждый член такой ренты работает на один период больше, чем в ренте постнумерандо.

Для расчёта основных характеристик ренты пренумерандо используются следующие формулы:

– *текущая стоимость ренты пренумерандо:*

$$PVA' = PVA \cdot (1+r), \tag{39}$$

$$PVA' = PVA \cdot (1+j/m)^{m/p}, \tag{40}$$

где PVA' – текущая стоимость ренты с выплатами в начале периода; PVA – текущая стоимость обыкновенного аннуитета.

– *будущая стоимость ренты пренумерандо:*

$$FVA' = FVA \cdot (1+r), \tag{41}$$

$$FVA' = FVA \cdot (1+j/m)^{m/p}, \tag{42}$$

где FVA' – будущая стоимость ренты с выплатами в начале периода; FVA – будущая стоимость обыкновенного аннуитета.

Отложенная рента

Начало выплат отложенной ренты сдвинуто вперед относительно некоторого момента времени.

Для отложенной на t лет ренты:

– *современная стоимость* равна дисконтированной на этот срок величине современной стоимости немедленной ренты (рис. 5).

0 – момент заключения контракта;

t – момент реализации ренты;

$t+1$ – первый платеж;

$t+2$ – второй;

$t+n$ - последний платеж.

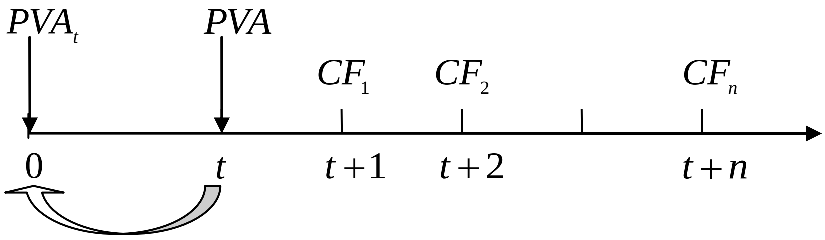


Рис. 5. Текущая стоимость отложенной ренты

$$PVA_t = PVA\frac{1}{(1+r)^t}, \tag{43}$$

где PVA_t – текущая стоимость отложенной ренты; PVA – текущая стоимость обыкновенного аннуитета.

– на величине *будущей стоимости,* сдвиг во времени не отражается, следовательно, для расчета могут быть использованы формулы обыкновенного аннуитета:

$$FVA_t = CF\frac{(1+r)^n - 1}{r}, \tag{44}$$

$$FVA_t = \frac{CF}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1}, \tag{45}$$

где FVA_t – будущая стоимость отложенной ренты.

Бесконечный аннуитет (вечная рента)

Вечная рента – ряд платежей, количество которых неограниченно.

Например, это облигации без срока погашения, по такой облигации доходы выплачиваются через равные промежутки времени, а возврата основной суммы долга нет.

Для бесконечного аннуитета имеют место следующие формулы:

– *современная стоимость* вечной ренты определяется, как:

$$PVA_\infty = \frac{CF}{r}, \tag{46}$$

для p - срочной вечной ренты с начислением процентов m раз в году по номинальной ставке j, текущая стоимость определяется по формуле:

$$PVA_{\infty} = \frac{CF}{p\left[(1+j/m)^{m/p} - 1\right]}; \qquad (47)$$

– *будущая стоимость* бесконечной ренты равна бесконечности:

$$FVA_{\infty} = \infty. \qquad (48)$$

Контрольные вопросы

1. Что такое поток платежей;
2. Основные параметры потоков платежей;
3. Виды потоков платежей;
4. Что такое текущая стоимость потока платежей, как её рассчитать?
5. Понятие будущей стоимости потока платежей и как её рассчитать?
6. Понятие «обыкновенный аннуитет» и его основные характеристики;
7. Периодический взнос на погашение кредита. Исходя из какой функции он может быть рассчитан?
8. Периодический взнос в фонд накопления. Какая функция используется для его определения?
9. Что такое бесконечный аннуитет, его основные параметры?
10. Отложенная рента и её основные параметры.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Тема 1: Наращение по простым процентам

Пр.1. Ссуда в размере 100 тыс. руб. выдана 20.01 по 05.10 включительно (год не високосный) под 15 % годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при условии начисления простых процентов? Рассчитайте наращенную сумму с использованием трех методик начисления простых процентов.

Решение:

$PV = 100.000$ руб.

$r = 0{,}15$

$FV = ?$

Срок операции выражен в днях, следовательно, для определения размера долга в конце срока используем формулу (3):

$$FV = PV(1 + \frac{t}{K} r).$$

Для использования всех трех методик, необходимо рассчитать число дней ссуды точное и приближенное:

– *точное* определяется строго по календарю и равно

$$t_{точное} = 11 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 5 = 258 \text{ дней;}$$

– *приближенное* рассчитывается исходя из предположения, что в каждом месяце ровно по 30 дней

$$t_{приближ} = 10 + 30 \cdot 8 + 5 = 255 \text{ дней.}$$

Рассчитаем наращенную сумму тремя способами.

1. *Точные проценты с точным числом дней ссуды* (365/365)

Временная база $K = 365$ дней, $t_{точное} = 258$ дней, тогда:

$$FV = 100.000(1 + \frac{258}{365} 0{,}15) = 110.603 \text{ руб.}$$

2. *Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды* (360/365)

$K = 360$ дней, $t_{точное} = 258$ дней:

$$FV = 100.000(1 + \frac{258}{360} 0{,}15) = 110.750 \text{ руб.}$$

3. *Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды* (360/360)

$K = 360$ дней, $t_{прибл} = 255$ дней:

$$FV = 100.000(1 + \frac{255}{360} 0{,}15) = 110.625 \text{ руб.}$$

Наиболее точные результаты даёт первый способ начисления процентов.

Пр.2. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – 10 % годовых, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 0,5 п.п. (процентных пункта). Определите множитель наращения за 2,5 года.

Решение:

В этом случае применяются изменяющиеся во времени (плавающие) ставки.

$r_1 = 0{,}10 \quad n_1 = 1$

$r_2 = 0{,}105 \quad n_2 = 0{,}5$

$r_3 = 0{,}11 \quad n_3 0{,}5 \qquad \sum_t n_t = 2{,}5$

$r_4 = 0{,}115 \quad n_4 = 0{,}5$

$r_5 0{,}115 \quad n_5 = 0{,}5$

Множитель наращения за 2,5 года равен:

$$(1 + \sum_t n_t r_t) = 1 + 1 \cdot 0{,}10 + 0{,}5 \cdot 0{,}105 + 0{,}5 \cdot 0{,}11 + 0{,}5 \cdot 0{,}115 = 1{,}265.$$

Т.е. при таком порядке начисления процентов, за 2,5 года первоначальная сумма увеличится в 1,265 раза.

Тема 2: Наращение по сложным процентам

Пр.3. Какой величины достигнет долг равный 100 тыс. руб., через пять лет при росте по сложной ставке 12 % годовых? Проценты начисляются: один раз в год, раз в полгода, ежеквартально и ежемесячно.

Решение:

$PV = 100.000$ руб.

$r = 0{,}12$

$n = 5$ лет

Рассчитаем накопленную сумму долга при начислении процентов:

1) *один раз в год*, в этом случае можно воспользоваться формулой (5):

$$FV = PV(1 + r)^n$$

$$FV = PV(1 + r)^n = 100.000(1 + 0{,}12)^5 = 176.234{,}16 \text{ руб.}$$

2) *по полугодиям*, т.е. два раза в год $m = 2$, следовательно, применяется номинальная ставка, и следует воспользоваться формулой (7):

$$FV = PV\left(1 + \frac{j}{m}\right)^N$$

$$FV = 100.000\left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^{2 \cdot 5} = 179.084{,}77 \text{ руб.,}$$

3) *ежеквартально*, $m = 4$:

$$FV = 100.000\left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4 \cdot 5} = 180.611{,}12 \text{ руб.,}$$

4) *ежемесячно,* $m = 12$:

$$FV = 100.000\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12\cdot 5} = 181.669{,}67 \text{ руб.}$$

Из примера видно, ***что чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения (цепной процесс)!***

Пр.4. Определите размер эффективной ставки, обеспечивающей безубыточную замену ежемесячного начисления процентов по номинальной ставке 25 % годовых.

Решение:

Из соотношения эквивалентности эффективной и номинальной ставки по формуле (8), рассчитаем годовую ставку сложных процентов эквивалентную номинальной ставке 25 % при ежемесячном начислении:

$m = 12$

$j = 0{,}25$

$$r = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}2807 \text{ или } \approx 28\ \%.$$

Т. е. начисление процентов один раз в год по эффективной ставке 28% годовых безубыточно заменяет ежемесячное начисление процентов по номинальной ставке 25% годовых.

Тема 3: Простые и сложные проценты

Пр.5. На сумму 600 тыс.руб. ежеквартально начисляются проценты по ставке 12% годовых. Срок операции 14 месяцев. Определить накопленную сумму с использованием смешанной схемы и сложных процентов.

Решение:

$PV = 600.000$ руб.

$j = 0{,}12$

Для определения размера суммы в конце срока при начислении процентов за дробное число лет воспользуемся формулами (14) и (15).

$$FV = PV\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n_1 + n_2}$$

$$FV = PV\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n_1} \cdot \left(1 + \frac{r}{m} \cdot n_2\right)$$

Проценты начисляются ежеквартально ($m = 4$), т.е. один период наращения равен трём месяцам. Выделим количество целых кварталов и оставшуюся дробную часть одного квартала:

$n_1 + n_2 = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$.

1. Схема сложных процентов:

$$FV = 600\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4+\frac{2}{3}} = 688,750 \text{ тыс. руб.}$$

2. Смешенная схема:

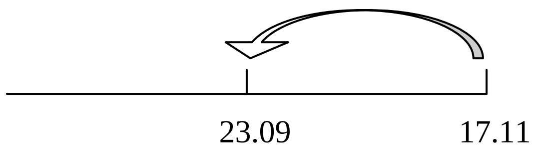
$$FV = 600\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4} \cdot \left(1 + \frac{0,12}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = 688,810 \text{ тыс. руб.}$$

Тема 4: Учётные ставки

Пр.6. Вексель выдан на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17.11.2006. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2006 по учетной ставке 20 % годовых способом (365/365). Рассчитайте, полученную векселедержателем при учете векселя сумму и величину дисконта в пользу банка.

Решение:

$FV = 100.000$ руб.
$d = 0,20$
Схематичное изображение условия задачи:



Движение во времени в обратном направлении предполагает операцию дисконтирования, при учёте векселей применяется один из способов дисконтирования – банковский учёт.

Определим срок от момента учёта до даты погашения. Т.к. используется способ (365/365) – это точные проценты с точным числом дней ссуды, следовательно, временная база $K = 365$ дней, а число дней ссуды определяется строго по календарю:

$n = 7 + 31 + 17 = 55$ дней.

Т.к. срок менее одного года, воспользуемся формулой учёта по простым процентам (19):

$$PV = FV(1 - nd)$$

Определим сумму, получаемую владельцем векселя при его учете:

$$PV = 100.000(1 - \frac{55}{365}0,2) = 96.986 \text{ руб.}$$

Дисконт в пользу банка составил:

$$D = FV - PV = 100.000 - 96.986 = 3.014 \text{ руб.}$$

Тема 5: Изменение условий коммерческих сделок

Пр.7. Имеется обязательство уплатить 300 тыс. руб. через шесть лет. Стороны согласились изменить условия погашения долга следующим образом: через три года выплачивается 100 тыс. руб., а оставшийся долг – спустя четыре года после первой выплаты. Необходимо определить сумму последнего платежа, при условии, что пересчёт осуществляется по ставке 10 % годовых.

Решение:

$r = 0{,}10$

$FV_1 = 300$ тыс. руб.

$n_1 = 6$ лет

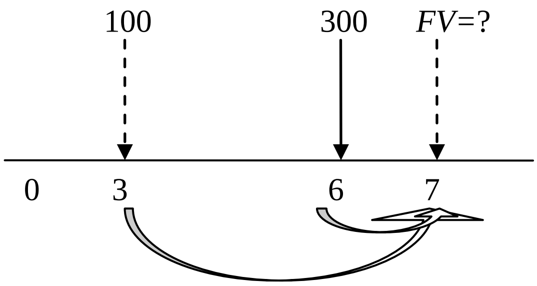
$FV_2 = 100$ тыс. руб.

$n_1 = 4$ года

Для того чтобы определить сумму остатка, необходимо составить уравнение эквивалентности, в котором сумму, по старому обязательству приведённую к какой либо дате приравнять к сумме новых платежей приведённых к этой же дате.

Если неизвестен размер платежа, уравнение эквивалентности удобнее составлять на дату неизвестного платежа. Поэтому в качестве базовой даты выберем дату выплаты остатка.

Изобразим графически условие задачи:



Движение во времени в прямом направлении предполагает операцию наращения. Поскольку сроки более одного года, то приведение осуществляем по схеме сложного процента путем умножения платежей на множитель наращения сложных процентов.

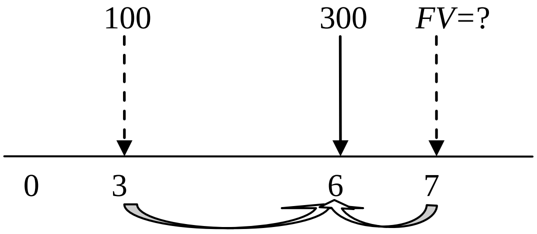
$(1+r)^n$ - множитель наращения по сложным процентам.

Уравнение эквивалентности будет иметь следующий вид:

$$300(1+0{,}1)^1 = 100(1+0{,}1)^4 + FV$$

Решив данное уравнение, получаем, что сумма остатка составляет 183,590 тыс. руб. В сумме по новому обязательству будет выплачено 100+183,590=283,590 тыс. руб., что на 16,410 тыс. руб. меньше чем по старому обязательству. Этот факт объясняется тем, что первый платёж в размере 100 тыс. руб. осуществляется три года раньше, и на эту сумму проценты уже не начисляются.

Аналогичное по смыслу равенство можно составить на любую базовую дату, например на конец шестого года:



В этом случае неизвестный платёж приводится к более ранней дате, поэтому он дисконтируется.

$\frac{1}{(1+r)^n}$ – множитель дисконтирования по сложным процентам.

И уравнение эквивалентности будет выглядеть следующим образом:

$$300 = 100(1+0,1)^3 + \frac{FV}{(1+0,1)^1}$$

Решив это уравнение, получили, что сумма остатка составляет 183,590 тыс. руб.

Изменение базовой даты, на которую составляется уравнение эквивалентности, не меняет условие задачи, а, следовательно, не должно отражаться на полученном результате. Лишь в некоторых случаях изменение базовой даты дает незначительное смещение результата.

Тема 6: Потоки платежей

Пр.8. Какую сумму необходимо положить на депозит под 10 % годовых сегодня, чтобы затем один раз в конце года в течение пяти лет снимать по 300 тыс. руб.?

Решение:

$CF = 300$ тыс. руб.

$r = 0{,}10$

$n = 5$ лет

В этой задаче необходимо определить современную (текущую) стоимость всех будущих изъятий по 300 тыс.руб. в течение пяти лет. Т.к. суммы изъятий и периоды времени между ними равные, следовательно, этот поток платежей является обыкновенным аннуитетом.

Для нахождения текущей стоимости обыкновенного аннуитета воспользуемся формулой (32):

$$PVA = CF\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

$$PVA = 300\frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 1.137 \text{ тыс. руб.}$$

Т.о. инвестор за весь срок снимает $5 \cdot 300 = 1.500$ тыс. руб. Разница между первоначальным вкладом 1.137 тыс. руб. и накоплением 1.500 тыс. руб. обеспечивается суммой процентов, начисляемых на уменьшающийся остаток вклада по технике сложного процента. Этот процесс предполагает, в конечном счете, *нулевой остаток* на депозите. Правильность расчетов можно проверить по методу депозитной книжки (табл. 1).

Таблица 1

Метод депозитной книжки

Год	Остаток на начало года	«+»10% на остаток	«-» годовое изъятие	Остаток на конец года
1	1137	114	300	951
2	951	95	300	746
3	746	75	300	521
4	521	52	300	273
5	273	27	300	0

Пр.9. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной ренты постнумерандо ежеквартально в течение пяти лет. Размер годового платежа 4 млн руб. На поступившие взносы ежемесячно начисляются проценты по ставке 18,5 % годовых. Определите величину фонда на конец срока?

Решение:

$CF = 4$ млн. руб.

$n = 5$ лет

$r = 0{,}185$

Капитализация процентов производится ежемесячно, т. е. $m = 12$, платежи осуществляются ежеквартально (четыре раза в год) $p = 4$.

Величина фонда в конце срока это есть сумма всех вносимых платежей с начисленными на них к концу срока процентами, т.е. будущая величина потока платежей. Для нахождения этой величины воспользуемся формулой (34):

$$FVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1},$$

тогда величина фонда в конце срока

$$FVA = \frac{4}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}185}{12}\right)^{12 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0{,}185}{12}\right)^{12/4} - 1} = 32{,}025 \text{ млн.руб.}$$

Т.о. внесение $4 \cdot 5 = 20$ млн руб. позволит за пять лет накопить 32,025 млн руб. Разница 12,025 млн руб. обеспечена начисленными процентами на возрастающую сумму на счёте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель курса «Финансовая математика» состоит в изучении методов количественного анализа, необходимых для принятия финансовых решений в условиях современного рынка.

В методических рекомендациях рассмотрены общетеоретические аспекты дисциплины «Финансовая математика», а также методы математических расчётов, применяемых в финансовых операциях. Значительное внимание уделено процессам наращения по простым и сложным процентам по фиксированным и переменным ставкам, дисконтированию по простой и сложной учетным ставкам, конверсии платежей, а также изучению различных видов потоков платежей.

Закреплению основных понятий и базовых формул будет способствовать самостоятельная проверка знаний с помощь ответов на вопросы, представленные после каждого раздела дисциплины.

Для проверки освоения курса и решения поставленных задач, студентами дневной и заочной формы обучения, выполняется контрольная работа по вариантам, состоящая из контрольных заданий по каждому разделу дисциплины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Четыркин, Е.М. Финансовая математика: учеб. / Е.М. Четыркин. – М.: Дело, 2006. – 396 с.
2. Ковалёв, В.В . Курс финансовых вычислений / В.В. Ковалёв, В.А. Уланов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 558 с.
3. Четыркин, Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчётов. / Е.М. Четыркин. – М.: «Дело ЛТД», 2005. – 320 с.
4. Кочович, Е. Финансовая математика с задачами и решениями: учебно-метод. пособие / Е. Кочович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 379 с.
5. Цымбаленко, С. В. Финансовые вычисления: учеб. / С.В. Цымбаленко. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 158 с.
6. Уланов, В.А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений / под ред. проф. В.В. Ковалёва. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 400 с.
7. Бочаров, В.В. Финансовый анализ / В.В. Бочаров. – СПб.: Питер, 2007. – 218 с.
8. Горбунов, А.Р. Управление финансовыми потоками / А.Р. Горбунов. – М.: Глобус, 2004. – 216 с.
9. Мельников, А.В. Математика финансовых обязательств / А.В. Мельников, С.Н. Волков, М.Л. Нечаев. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 259 с.
10. Бердникова , Т.Б. Оценка ценных бумаг / Т.Б. Бердникова. – М.: Инфра-М, 2006. – 143 с.
11. Бертонеш, М. Управление денежными потоками / М. Бертонеш. – СПб.: Питер, 2004. – 240 с.
12. Тертышный, С.А. Рынок ценных бумаг и методы его анализа / С.А. Тертышный. – СПб.: Питер, 2005. – 220 с.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Ростовский государственный строительный университет»

Утверждено
на заседании кафедры
прикладной математики и
вычислительной техники
28 августа 2013 г.

Финансовая математика (2 часть)

Методические указания для проведения лабораторных работ для подготовки бакалавров направления 230700.62 «Прикладная информатика»

Ростов-на-Дону

2014

УДК 336.7
Финансовая математика (2 часть): методические указания для проведения лабораторных работ для подготовки бакалавров направления 230700.62 «Прикладная информатика». – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. – 31 с.

Являются второй частью серии методических указаний по финансовой математике. Рассмотрен раздел финансовой математики, содержащий основные методы финансового анализа для сравнения эффективностей финансовых операций (эквивалентные процентные ставки, уравнение финансовой эквивалентности, составление плана погашения долга, характеристики инфляции, метод сравнения современной стоимости, метод определения предельных значений контрактов). Теоретическая часть сопровождается лабораторным практикумом по изученным темам, задачей которого является получение навыков самостоятельного проведения финансово-аналитических расчётов с использованием встроенных финансовых функций и других ресурсов среды MS Excel.

Электронная версия методических указаний находится в библиотеке, ауд. 224. Предназначены для бакалавров очной и заочной форм обучения направления 230700.62 «Прикладная информатика».

УДК 336.7

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доц. Н.П. Красий

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. М.Н. Богачёва

Редактор М.А. Цыганова
Темплан 2014 г., поз. 64

Подписано в печать 06.12.13 Формат $60 \times 84/16$. Бумага писчая. Ризограф.
Уч.-изд.л. 2,0. Тираж 25 экз. Заказ

Редакционно-издательский центр
Ростовского государственного строительного университета
344022, Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162.

Данные методические указания продолжают курс финансовой математики, начало которого изложено в первой части МУ «Финансовая математика». Для цельности представления материала мы продолжаем нумерацию глав, пунктов и формул, а также используем ссылки на формулы первой части.

3. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТЕЙ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВОЙ ОПЕРАЦИИ

Оценкой качества любой финансовой операции является её ***эффективность***, отражающая отношение конечного результата финансовой операции (наращенной суммы, процентов, чистой прибыли и т.п.) к условиям её проведения (тип финансовой операции, вложения, инфляция, законодательная база и пр.). Примером эффективности является *доходность* финансовой операции.

Полная доходность финансовых операций измеряется в виде годовой процентной ставки, начисление процентов по которой обеспечит выплату всех платежей, таким образом, определение *доходности финансовой операции* формально сводится к определению ставки наращения при условии, что все остальные параметры сделки известны.

Рассмотрим следующую задачу: инвестируется сумма P на срок n лет; в конце срока инвестор получит S; определить доходность инвестиций. В этом случае процентную ставку называют *доходностью ссудной операции*.

Формула для доходности в виде простой ставки наращения определяется решением (1.4) относительно ставки i:

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{n}. \tag{3.1}$$

Пример 3.1. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 12000 р. через 300 дней. Первоначальная сумма долга – 10 000 р. Определить доходность ссудной операции в виде простой годовой ставки наращения при К=360.

Решение. Для расчета воспользуемся формулой (3.1):

$$i = \frac{\frac{S}{P} - 1}{n} = \frac{\frac{12000}{10000} - 1}{300/360} = 0{,}24 \text{ или } i = 24\ \%. \blacksquare$$

Для определения величины доходности в виде номинальной процентной ставки можно воспользоваться следующей формулой

$$j = m\left(\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right). \tag{3.2}$$

Пример 3.2. Финансовый инструмент куплен за 25 000 р., его выкупная цена через 1,8 года составит 35 000 р., проценты начисляются один раз в месяц. Определить доходность операции в виде номинальной ставки сложных процентов.

Решение. Находим номинальную процентную ставку по формуле (3.2): $m = 12, S = 35000, P = 25000, n = 1{,}8$

$$j = m\left(\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right) = 12 \cdot \left(\left(\frac{35000}{25000}\right)^{\frac{1}{12 \cdot 1{,}8}} - 1\right) = 0{,}1884 \text{ или } j = 18{,}84\ \%. \blacksquare$$

При сравнении финансовых операций, как правило, выбирают ту, которая имеет большую доходность. Легко представить ситуации, когда для выбора той или иной финансовой операции только одной доходности не хватает. Например, доходность первой операции больше, чем доходность второй. Однако вложения в первую операцию велики по сравнению со второй, и у инвестора не хватает средств для таких инвестиций. В этом и подобных случаях при анализе качества операций привлекаются другие показатели: тип финансовой операции, вложения, инфляция, законодательная база, наращенная сумма, проценты, чистая прибыль и пр.

3.2. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ИЗМЕНЕНИЯ УСЛОВИЙ КОНТРАКТА

В главе 1 были рассмотрены следующие виды процентных ставок: простая процентная ставка наращения; простая учетная ставка; сложная процентная ставка наращения; номинальная процентная ставка наращения; сложная учетная ставка; сила роста.

Эквивалентными процентными ставками называются любые две из перечисленных, которые при замене одной на другую приводят к одинаковым финансовым результатам, т.е. отношения сторон не изменяются в рамках одной финансовой операции (все остальные параметры сделки – срок, текущая и будущая стоимости – одинаковы).

Определим соотношения эквивалентности между простой и сложной процентными ставками наращения. Так как начальные и наращенные суммы одинаковы, приравняем множители наращения:

$$1 + ni_1 = (1 + i_2)^n,$$

где i_1 — простая процентная ставка наращения; i_2 — сложная процентная ставка наращения; n — срок операции в годах.

Решив это уравнение относительно i_2 и i_1, получим

$$i_1 = \frac{(1 + i_2)^n - 1}{n}, \; i_2 = \sqrt[n]{1 + ni_1} - 1. \qquad (3.3)$$

Найдем соотношения эквивалентности между номинальной процентной ставкой наращения j и сложной процентной ставкой наращения i. В этом случае сложная процентная ставка наращения называется *эффективной ставкой процентов.*

Эффективная ставка процентов — это годовая ставка сложных процентов при начислении раз в году, которая дает тот же результат, что и m-

разовое начисление процентов по ставке j/m.

Поэтому множители наращения эффективной и номинальной ставок должны быть равны друг другу

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Решив уравнение относительно i (сложная процентная ставка) и j, получим

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1,\ j = m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right). \tag{3.4}$$

Замена в договоре номинальной ставки j при m-разовом начислении процентов на эффективную ставку i не изменит финансовых обязательств участников сторон, т.е. обе ставки в финансовом отношении являются эквивалентными.

Связь дискретных ставок i и j с силой роста δ находится из равенства множителей наращения дискретных (1.5), (1.6) и непрерывной (1.7) ставок:

$$\delta = \ln(1+i), i = e^{\delta} - 1,$$
$$\delta = m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right),\ j = m\left(e^{\delta/m} - 1\right). \tag{3.5}$$

Пример 3.3. На сумму 15 000 р. начисляются проценты по сложной годовой ставке i = 22 % в течение 3,5 года. Определить силу роста и наращенную сумму при дискретном и непрерывном начислении.

Решение. Рассчитаем силу роста по формуле (3.5):

$$\delta = \ln\,(1+0{,}22) = \ln 1{,}22 = 0{,}19885086, \text{ или } 19{,}89\ \%.$$

Наращенная сумма при непрерывном начислении согласно (1.7) составит

$$S = 15000e^{0{,}19885086\cdot 3{,}5} = 30\ 085{,}05 \text{ р.}$$

Наращенная сумма при дискретном начислении согласно (1.5) составит

$$S = 15000\cdot(1+0{,}22)^{3{,}5} = 30\ 085{,}05 \text{ р.}$$

Таким образом, как и следовало ожидать, наращенные суммы при дискретном и непрерывном способах начисления совпали. ■

Иногда возникает необходимость по известной сложной рыночной процентной ставке наращения определить учетную ставку, которая затем будет использоваться для учета векселей.

Для простой учетной ставки и сложной ставки наращения уравнение их эквивалентности приобретает вид:

$$(1+i)^n = \frac{1}{1-n\cdot d},$$

где i — сложная ставка наращения; d — простая учетная ставка; n — срок в годах от момента учета до момента погашения, откуда

$$d = \frac{1-(1+i)^{-n}}{n}. \tag{3.6}$$

Аналогично для сложной учетной ставки и сложной ставки наращения

$$(1+i)^n = \frac{1}{(1-d)^n},$$

откуда получим:

$$d = \frac{i}{i+1}. \qquad (3.7)$$

Пример 3.4. Банк выплачивает по вкладам 10 % годовых (сложных). Какова реальная доходность вкладов в этом банке при следующих видах начисления процентов:

1) ежемесячно;
2) ежеквартально;
3) по полугодиям;
4) непрерывно.

Решение. Применив формулы (3.4)–(3.5), получим следующее:

1) $i = \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\dfrac{0,1}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1047 = 10,47\%;$

2) $i = \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\dfrac{0,1}{4}\right)^{4} - 1 = 0,1038 = 10,38\%;$

3) $i = \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1+\dfrac{0,1}{2}\right)^{2} - 1 = 0,1025 = 10,25\%;$

4) $i = e^{\delta} - 1 = e^{0,1} - 1 = 0,1052 = 10,52\%.$ ■

3.3. ПЛАН ПОГАШЕНИЯ ЗАДОЛЖЕННОСТИ

Баланс финансовой операции предусматривает эквивалентность выплат и поступлений. Рассмотрим применение уравнения финансовой эквивалентности на примере составления плана погашения задолженности при начислении по сложной процентной ставке.

Контур этой финансовой операции для сложной процентной ставки со сроком погашения $t_4 - t_0$ (в годах) и 4-мя выплатами по долгу представлен на рис. 3.1, где

P_0 – первоначальная сумма долга;

S_1, S_2, S_3, S_4 – наращенные по ставке i суммы долга;

Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 – ***срочные уплаты***, представляющие собой сумму процентов и основных выплат по долгу ($Y_k = I_k + R_k$, $k = 1,2,3,4$);

P_1, P_2, P_3, 0 – оставшиеся суммы долга после выплат в даты погашения t_1, t_2, t_3, t_4 соответственно.

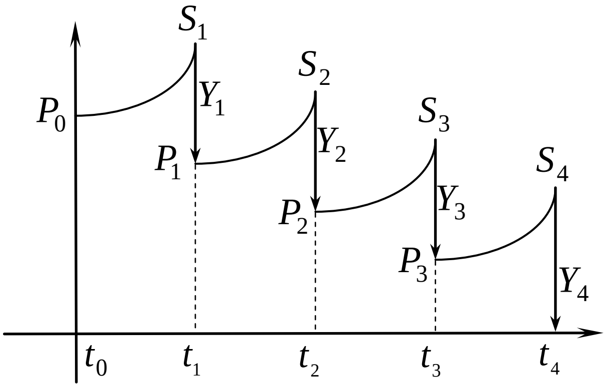


Рис. 3.1

Непогашенный остаток долга служит базой для начисления процентов за следующий период.

Сбалансированная операция имеет замкнутый контур, т.е. последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности, откуда следует, что наращенная к концу срока первоначальная сумма долга равна сумме частичных платежей, также наращенных к концу срока. Схема выплат по долгу может быть рассмотрена как поток платежей, т.е. другими словами наращенная сумма первоначального долга и наращенная сумма потока платежей совпадают и удовлетворяют уравнению финансовой эквивалентности для наращенных сумм:

$$P_0(1+i)^{t_4-t_0} - S = 0, \text{ где } S = \sum_{k=1}^{4} Y_k (1+i)^{t_4-t_k} \text{ согласно формуле (2.1).}$$

Дисконтируя полученные наращенные суммы на начало срока долга, имеем уравнение финансовой эквивалентности для современных стоимостей:

$$P_0 - A = 0, \text{ где } A = \sum_{k=1}^{4} \frac{Y_k}{(1+i)^{t_k-t_0}} \text{ согласно формуле (2.2).} \tag{3.8}$$

Что касается составления плана погашения задолженности – графика периодических платежей должника – одним из вариантов является *погашение долга в рассрочку* (*амортизация долга*).

Пусть срок долга составляет *n* лет. Проценты на сумму долга начисляются в конце каждого года по сложной годовой процентной ставке *i*.

Амортизация долга может проходить двумя способами:

- погашение основного долга равными суммами основных выплат;
- погашение долга равными срочными уплатами.

В случае ***погашения основного долга равными суммами основных выплат*** величина долга каждый год будет убывать на P_0/n. После очередной выплаты величина долга P_j в конце года под номером *j* ($j = 1,2,\ldots,n$) будет равна

$$P_j = P_0(1 - j/n). \tag{3.9}$$

Срочная уплата, состоящая из ежегодной выплаты основного долга P_0/n и процентов

$$I_j = P_{j-1} i \tag{3.10}$$

в году под номером *j* определяется соотношением

$$Y_j = I_j + P_0/n. \qquad (3.11)$$

Пример 3.5. Сумму долга в 1 000 000 р. необходимо погасить в течение 4 лет равными суммами. Выплаты основного долга производятся и проценты на долг по ставке 12 % годовых начисляются в конце каждого года. Составить план погашения задолженности.

Решение. Ежегодные выплаты по погашению основного долга составляют

$$P_0/n = 1\,000\,000/4 = 250\,000 \text{ р.}$$

Оставшаяся сумма долга в конце каждого года определяется по формуле(3.9):

$$P_1 = 1\,000\,000 \cdot (1 - 1/4) = 750\,000;\ P_2 = 500\,000;\ P_3 = 250\,000; P_4 = 0.$$

Ежегодные выплаты процентов по формуле(3.10):

$$I_1 = 1\,000\,000 \cdot 0{,}12 = 120\,000;\ I_2 = 750\,000 \cdot 0{,}12 = 90\,000;$$

$$I_3 = 500\,000 \cdot 0{,}12 = 60\,000; I_4 = 250\,000 \cdot 0{,}12 = 30\,000.$$

Срочные уплаты находим по формуле(3.11):

$$Y_1 = 120\,000 + 250\,000 = 370\,000;\ Y_2 = 90\,000 + 250\,000 = 340\,000;$$

$$Y_3 = 60\,000 + 250\,000 = 310\,000; Y_4 = 30\,000 + 250\,000 = 280\,000.$$

Полученные результаты удобно отразить в таблице:

Номер года	Остаток долга на конец года, тыс. р.	Основная плата, тыс. р.	Проценты, тыс. р.	Срочная уплата, тыс. р.
1	750	250	120	370
2	500	250	90	340
3	250	250	60	310
4	0	250	30	280

■

При ***погашении долга равными срочными уплатами***, так как величина долга постепенно сокращается, происходит уменьшение процентов и увеличение выплат основного долга.

Величину срочной уплаты в рассматриваемом случае можно определить как годовую выплату ренты с процентной ставкой i, сроком n и современной стоимостью, равной величине долга P_0:

$$Y = \frac{P_0}{a_{n;i}} = \frac{P_0 i}{1 - (1+i)^{-n}}, \qquad (3.12)$$

а значение выплаты в конце года под номером j ($j = 1,2,\ldots,n$) определяется соотношением:

$$R_j = Y - I_j. \qquad (3.13)$$

Остаток основного долга в конце года под номером j ($j = 1,2,\ldots,n$) после выплат вычисляется по формуле

$$P_j = P_{j-1} - R_j. \qquad (3.14)$$

Пример 3.6. Сумму долга в 1 000 000 р. необходимо погасить в течение 4 лет равными срочными уплатами. Срочные уплаты производятся, и проценты на долг по ставке 12 % годовых начисляются в конце каждого года. Составить план погашения задолженности.

Р е ш е н и е. Срочные ежегодные уплаты по погашению долга вычисляются по формуле (3.12):

$$Y = \frac{1\ 000\ 000 \cdot 0{,}12}{1 - 1{,}12^{-4}} = 329\ 234{,}44 \text{ р.}$$

Проценты в конце первого года находим по формуле (3.10) для $j = 1$:

$$I_1 = P_0 i = 1\ 000\ 000 \cdot 0{,}12 = 120\ 000 \text{ р.}$$

Величина выплаты в конце первого года определяется соотношением (3.13) для $j = 1$:

$$R_1 = Y - I_1 = 329\ 234{,}44 - 120\ 000 = 209\ 234{,}44 \text{ р.}$$

Остаток долга на конец первого года рассчитаем по формуле(3.14):

$$P_1 = P_0 - R_1 = 1\ 000\ 000 - 209\ 234{,}44 = 790\ 765{,}56 \text{ р.}$$

Проценты в конце второго года находим по формуле (3.10) для $j = 2$:

$$I_2 = P_1 i = 790\ 765{,}56 \cdot 0{,}12 = 94\ 891{,}87 \text{ р.}$$

Величина выплаты в конце второго года определяется соотношением (3.13) для $j = 2$:

$$R_2 = Y - I_2 = 329\ 234{,}44 - 94\ 891{,}87 = 234\ 342{,}57 \text{ р.}$$

Остаток долга на конец второго года рассчитаем по формуле (3.14):

$$P_2 = P_1 - R_2 = 790\ 765{,}56 - 234\ 342{,}57 = 556\ 422{,}99 \text{ р.}$$

Проценты в конце третьего года находим по формуле (3.10) для $j = 3$:

$$I_3 = P_2 i = 556\ 422{,}99 \cdot 0{,}12 = 66\ 770{,}76 \text{ р.}$$

Величина выплаты в конце третьего года определяется соотношением (3.13) для $j = 3$:

$$R_3 = Y - I_3 = 329\ 234{,}44 - 66\ 770{,}76 = 262\ 463{,}68 \text{ р.}$$

Остаток долга на конец третьего года рассчитаем по формуле (3.14):

$$P_3 = P_2 - R_3 = 556\ 422{,}99 - 262\ 463{,}68 = 293\ 959{,}32 \text{ р.}$$

Проценты в конце четвёртого года находим по формуле (3.10) для $j = 4$:

$$I_4 = P_3 i = 293\ 959{,}31 \cdot 0{,}12 = 35\ 275{,}12 \text{ р.}$$

Величина выплаты в конце четвёртого года определяется соотношением (3.13) для $j = 4$:

$$R_4 = Y - I_4 = 329\ 234{,}44 - 35\ 275{,}12 = 293\ 959{,}32 \text{ р.}$$

Остаток долга на конец четвёртого года рассчитаем по формуле (3.14):

$$P_4 = P_3 - R_4 = 293\ 959{,}32 - 293\ 959{,}32 = 0 \text{ р.}$$

Полученные результаты занесём в таблицу:

Номер года	Остаток долга на конец года, р.	Основная плата, р.	Проценты, р.	Срочная уплата, р.
1	790 765,56	209 234,44	120 000	329 234,44
2	556 422,99	234 342,57	94 891,870	329 234,44
3	293 959,32	262 463,68	66 770,76	329 234,44
4	0	293 959,32	35 275,12	329 234,44

■

В настоящее время при выдаче потребительского кредита на неотложные нужды Банк России производит начисление процентов ежедневно по ставке *j* % годовых, выплаты по кредиту осуществляются ежемесячно равными суммами основных выплат. За рассмотрение кредитной заявки и за обслуживание ссудного счёта единовременно взимаются комиссии. В соответствии с требованиями Банка России эффективная процентная ставка *i* находится из уравнения:

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{Y_k}{(1+i)^{(t_k - t_0)/365}} - \left(P_0 - P_{ком}\right) = 0, \tag{3.15}$$

где K – количество месяцев (по сроку кредита), $P_{ком}$ – размер комиссионных.

Нетрудно понять, что это уравнение финансовой эквивалентности для современных стоимостей (3.8).

Заёмщику выдаётся информация о размере эффективной процентной ставки, рассчитанной на основе примерного графика платежей по кредиту. График платежей примерный, потому что предусматривается возможность досрочного погашения кредита, а также несвоевременные выплаты, что меняет картину платежей. График составляется с расчётом на то, что выплаты по кредиту вносятся точно в срок строго в указанном размере.

Так могут выглядеть расчёты для клиента, если кредит в размере 40 000 р. выдан 28.03.2008 г. на 18 месяцев под 16 % годовых, а за рассмотрение кредитной заявки и за обслуживание ссудного счёта комиссии составляют соответственно 50 р. и 2100 р.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Дата	срочные уплаты	проценты	основная плата	остаток долга в конце месяца	ставка кредита	эффективная ставка	
2	28.03.08				40 000,00р.			-37 850,00р.
3	28.04.08	2 769,37р.	547,15р.	2 222,22р.	37 777,78р.	16,00%	26,57%	2 714,51р.
4	28.05.08	2 722,20р.	499,97р.	2 222,22р.	35 555,56р.			2 617,10р.
5	28.06.08	2 708,58р.	486,36р.	2 222,22р.	33 333,33р.			2 552,42р.
6	28.07.08	2 663,38р.	441,15р.	2 222,22р.	31 111,11р.			2 461,70р.
7	28.08.08	2 647,78р.	425,56р.	2 222,22р.	28 888,89р.			2 398,80р.
8	28.09.08	2 617,39р.	395,16р.	2 222,22р.	26 666,67р.			2 324,29р.
9	28.10.08	2 575,15р.	352,92р.	2 222,22р.	24 444,44р.			2 242,92р.
10	28.11.08	2 556,59р.	334,37р.	2 222,22р.	22 222,22р.			2 182,65р.
11	28.12.08	2 516,32р.	294,10р.	2 222,22р.	20 000,00р.			2 107,08р.
12	28.01.09	2 495,80р.	273,58р.	2 222,22р.	17 777,78р.			2 048,49р.
13	28.02.09	2 465,40р.	243,18р.	2 222,22р.	15 555,56р.			1 983,45р.
14	28.03.09	2 414,28р.	192,06р.	2 222,22р.	13 333,33р.			1 907,54р.
15	28.04.09	2 404,61р.	182,38р.	2 222,22р.	11 111,11р.			1 862,26р.
16	28.05.09	2 369,27р.	147,05р.	2 222,22р.	8 888,89р.			1 799,71р.
17	28.06.09	2 343,81р.	121,59р.	2 222,22р.	6 666,67р.			1 745,10р.
18	28.07.09	2 310,45р.	88,23р.	2 222,22р.	4 444,44р.			1 687,27р.
19	28.08.09	2 283,02р.	60,79р.	2 222,22р.	2 222,22р.			1 634,21р.
20	28.09.09	2 252,62р.	30,40р.	2 222,22р.	0,00р.			1 580,50р.
21								
22								5,8444E-07

Рис. 3.2

Основная плата вычисляется по формуле P_0/K, проценты для *k*-го месяца

($k=1,2,\ldots,K$) рассчитываются по формуле $I_k = P_{k-1}\left(\left(1+\dfrac{j}{365}\right)^{t_k - t_{k-1}} - 1\right)$, срочные уплаты находятся по формуле (3.11). Столбец H выделен под вспомогательные расчёты, где сначала в ячейке H2 находится полученная на руки сумма (размер кредита минус комиссионные), а в остальных ячейках находятся значения каждого слагаемого суммы из формулы (3.15). Так, например, в ячейке H3 содержится формула =B3/(1+G$3)^((A3-A$2)/365), а ячейке H22 суммируются все значения столбца H, после чего **Подбором параметра** (приравнивая значение ячейки H22 к нулю) определяется значение эффективной ставки. Следует заметить, что при увеличении срока кредита размер эффективной ставки уменьшается.

3.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФЛЯЦИИ

Без учета инфляции конечные результаты расчетов денежных потоков являются весьма условными. Рассмотрим некоторые понятия, связанные с инфляционными процессами.

Реальная стоимость C *суммы* S*, обесцененной во времени* за счет инфляции, рассчитывается по формуле

$$C = S / I_p, \tag{3.14}$$

где I_p — *индекс цен* или темп роста цен на заданную группу товаров.

Темпом прироста инфляции называется относительный прирост цен за период:

$$H = I_p - 1. \tag{3.15}$$

Индекс цен за несколько периодов n, следующих друг за другом, вычисляется по формуле

$$I_p = \prod_{t=1}^{n} (1 + H_t), \tag{3.16}$$

где t — номер периода; H_t — темп прироста инфляции в периоде t.

Средний за период темп прироста инфляции $\overline{H}$, находится по формуле:

$$\overline{H} = \sqrt[n]{I_p} - 1, \tag{3.17}$$

где n — количество периодов (лет).

Для простых процентов обесцененная инфляцией сумма определяется выражением

$$C = P\frac{1+ni}{I_p} = P\frac{1+ni}{(1+\overline{H})^n}. \tag{3.18}$$

Для сложных процентов обесцененную инфляцией сумму можно рассчитать по формуле

$$C = P\frac{(1+i)^n}{I_p} = P\left(\frac{1+i}{1+\overline{H}}\right)^n. \tag{3.19}$$

Таким образом, реальная стоимость суммы, обесцененной во времени за счет инфляции, будет по-разному вести себя в течение времени. Ход этой зависимости будет связан со средним темпом прироста инфляции $\overline{H}$, и процентной ставкой i.

Возможны следующие ситуации:

- $i > \overline{H}$ — реальный рост;
- $i = \overline{H}$, — наращение поглощается инфляцией;
- $i < \overline{H}$ — эрозия капитала, т.е. обесценение денег во времени за счет инфляции.

Пример 3.7. Темп прироста инфляции за первый год составил 20 %, а за второй — 10 %. Определить темп прироста инфляции за 2 года, а также обесцененную наращенную сумму, если на сумму 10 000 р. в течение двух лет начислялась сложная процентная ставка 10 % (20 %) годовых.

Решение. Индекс цен и темп инфляции за два года рассчитаем, по формулам (3.16) и (3.15):

$$I_p = (1 + 0{,}2) \cdot (1 + 0{,}1) = 1{,}32;$$

$$H = 1{,}32 - 1 = 0{,}32, \quad \text{или} \quad 32\%.$$

Обесцененная инфляцией сумма в соответствии с (3.19):

$$C_1 = 10\,000 \cdot \frac{(1 + 0{,}1)^2}{1{,}32} = 9\,166{,}67 \text{ р.};$$

$$C_2 = 10\,000 \cdot \frac{(1 + 0{,}2)^2}{1{,}32} = 10\ 909{,}09 \text{ р.} \ ■$$

Для компенсации обесценения денег ставку увеличивают на величину инфляционной премии, являющейся дополнительной доходностью, компенсирующей инфляционные потери. Итоговую ставку называют ***брутто-ставкой***. Связь брутто-ставки r и реальной (или желаемой) доходности a для сложных процентов определяется соотношениями, следующими из условия эквивалентности этих ставок $\frac{(1+r)^n}{I_p} = (1+a)^n$ и формул (3.19) и (1.5):

$$r = (1+a)\sqrt[n]{I_p} - 1 = (1+a)(1+\overline{H}) - 1, \; a = \frac{1+r}{\sqrt[n]{I_p}} - 1 = \frac{1+r}{1+\overline{H}} - 1. \tag{3.20}$$

3.5. ДОХОДНОСТЬ ДОЛГОСРОЧНОГО КРЕДИТА И ЛИЗИНГА

Доходность долгосрочного кредита. Пусть долгосрочный кредит в размере A выдаётся на срок n под сложную годовую ставку b, проценты выплачиваются p раз в году, годовая выплата суммы процентов равна Ab, основной долг выплачивается в конце срока. При определении *полной доходности кредитора* в виде годовой ставки сложных процентов $i_к$ полагают, что современная стоимость всех выплат по кредиту по ставке $i_к$ равна сумме A и балансовое уравнение принимает вид:

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{R_1}{(1+i_к)^j} + \frac{A}{(1+i_к)^n}, \qquad (3.21)$$

где R_1 – современная стоимость выплат за каждый отдельный год в начале этого года, вычисляемая по формуле (2.20) при $R = Ab$ и $n = 1$, т.е.

$$R_1 = \frac{Ab}{p}\left(\frac{i_к}{(1+i_к)^{1/p}-1}\right)\cdot\frac{1}{1+i_к}. \qquad (3.22)$$

Подставив выражение (3.22) в формулу (3.21) и сократив на *A*, получим:

$$1 = b\frac{1-(1+i_к)^{-n}}{p\left[(1+i_к)^{1/p}-1\right]} + \frac{1}{(1+i_к)^n} \Leftrightarrow b a_{n;i_к}^{(p)} + (1+i_к)^{-n} - 1 = 0, \qquad (3.23)$$

где $a_{n;i_к}^{(p)}$ – коэффициент приведения (2.23). Решив это уравнение относительно $i_к$, найдём доходность кредитора без учёта инфляции, а, воспользовавшись формулой (3.20) при $r = i_к$, можем найти его реальную доходность $a_к$.

Доходность лизинга. ***Лизинг*** – это предоставление имущества ценой *V* в аренду на срок *n* лет с годовыми взносами *R*, выплачиваемыми *p* раз в год по лизинговой годовой процентной ставке *f* с выплатой в конце срока остаточной стоимости имущества *W*. *Доходностью лизингодателя* является годовая ставка сложных процентов $i_л$, дающая совпадение современных стоимостей *p*-срочной ренты выплат по лизингу и долга лизингополучателя, выражаемого формулой:

$$A = V - \frac{W}{(1+f)^n}. \qquad (3.24)$$

Уравнение финансовой эквивалентности соответствует равенству правых частей формул (3.24) и (2.22):

$$R\frac{1-(1+i_л)^{-n}}{p\left[(1+i_л)^{1/p}-1\right]} = V - \frac{W}{(1+f)^n} \Leftrightarrow R\frac{1-(1+i_л)^{-n}}{p\left[(1+i_л)^{1/p}-1\right]} - V + \frac{W}{(1+f)^n} = 0. \qquad (3.25)$$

Уравнения (3.23) и (3.25) удобно решать в среде Excel, выполнив **Подбор параметра**.

3.6. СТОИМОСТЬ КАПИТАЛА И НАЛОГОВАЯ ЗАЩИТА

Ясно, что доход одной из сторон участников финансовой операции влечёт убытки другой стороны. Оценкой убытка выступает ***стоимость капитала*** – это процентная ставка, по которой начисляются проценты на полученную сумму. В некоторых случаях стоимость капитала совпадает с доходностью соответствующей финансовой операции. Однако существуют возможности понизить стоимость, например использованием *налоговой защиты*.

Чистая прибыль – это разница между прибылью до налогообложения и налогом на прибыль. Выплата из налогооблагаемой прибыли уменьшает налоговую базу, что приводит к увеличению размера чистой прибыли по сравнению со случаем того же платежа из чистой прибыли.

Налоговая защита – это возможность отдельных выплат из налогооблагаемой прибыли. Варианты использования налоговой защиты определяются законом. Так, налоговой защите подлежат выплаты процентов по кредиту, если процентная ставка по этому кредиту не превышает ставку рефинансирования Центрального банка РФ, увеличенную в 1,1 раза.

Стоимость долгосрочного кредита. Если расчёт за кредит производится из чистой прибыли, то стоимость кредита будет равна полной доходности кредитора. Если платежи за кредит изымаются из налогооблагаемой прибыли, то стоимость кредита уменьшается благодаря налоговой защите, при этом часть расходов по погашению кредита берёт на себя государство. Величина налоговой защиты зависит от *ставки налога* g.

Если сумма кредита и проценты выплачиваются из налогооблагаемой прибыли, это приводит к тому, что стоимость кредита становится отрицательной величиной, то есть заёмщик получает прибыль. Налоговым законодательством разрешены выплаты из налогооблагаемой прибыли процентов по кредиту. В конце срока кредит погашается из чистой прибыли предприятия. Формула расчёта стоимости кредита в этом случае имеет вид:

$$\tilde{i}_к = b(1-g), \tag{3.26}$$

где b – ставка кредита.

Стоимость лизинга. Стоимость лизинга, также как и стоимость кредита, уменьшается благодаря налоговой защите. Доходность лизинга определяется из уравнения (3.25), что соответствует выплате из чистой прибыли суммы $R(1-g)$, где g – ставка налога на прибыль. Современная стоимость всех платежей из чистой прибыли по ставке $\tilde{i}_л$, равной стоимости лизинга, должна быть равна долгу лизингополучателя (3.24), т.е.

$$R(1-g)\frac{1-\left(1+\tilde{i}_л\right)^{-n}}{p\left[\left(1+\tilde{i}_л\right)^{1/p}-1\right]} = V - \frac{W}{(1+f)^n}. \tag{3.27}$$

Приравнивая левые части (3.25) и (3.27) получим

$$\frac{1-\left(1+i_л\right)^{-n}}{(1-g)\left[\left(1+i_л\right)^{1/p}-1\right]} - \frac{1-\left(1+\tilde{i}_л\right)^{-n}}{\left[\left(1+\tilde{i}_л\right)^{1/p}-1\right]} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_{n;i_л}^{(p)}}{1-g} - a_{n;\tilde{i}_л}^{(p)} = 0 \tag{3.28}$$

Стоимость лизинга возрастает при увеличении его срока. Более того, при незначительных сроках стоимость лизинга становится отрицательной величиной, т.е. лизингополучатель будет получать проценты, а не платить их. Этот эффект связан с налоговой защитой.

3.7. СРАВНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ СТОИМОСТЕЙ ВСЕХ ПЛАТЕЖЕЙ КОНТРАКТОВ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОНТРАКТОВ. СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛИЗИНГА И КРЕДИТА

Выявление зависимости конечных результатов от основных параметров операции рассмотрим на примере методов сравнения коммерческих контрактов.

Задача выбора коммерческого контракта возникает, например, при покупке одного и того же товара у различных поставщиков, каждый из которых предлагает свои условия продажи. Другим примером является выбор условий погашения кредита, которые предлагают различные кредиторы. Таким образом, перед покупателем возникает проблема выбора контракта из нескольких возможных альтернатив. Обычно при выборе контракта используются два метода:

1) метод сравнения современных стоимостей всех платежей;

2) метод определения предельных значений параметров контрактов.

Метод сравнения современных стоимостей контрактов. При определении наилучшего для себя контракта покупатель находит современную стоимость всех платежей каждого из контрактов и выбирает контракт с наименьшей современной стоимостью при приемлемых технических, организационных и юридических условиях. Возникает вопрос, по какой ставке следует проводить дисконтирование для получения наиболее достоверных результатов? В инвестиционном анализе эту ставку называют ***ставкой сравнения***. По этой ставке производится расчет современной стоимости и от её значения существенным образом зависят все результаты.

Выбор ставки дисконтирования существенным образом зависит от уровней инфляции и риска. Особая важность правильного выбора ставки сравнения заключается в том, что в нее входят многие характеристики как внутренней, так и внешней среды финансовой операции.

В общем случае ставка дисконтирования может быть рассчитана по формуле

$$q = (1+Q)(1+\overline{H}) - 1, \tag{3.29}$$

где q — ставка дисконтирования с учетом инфляции;

Q — очищенная от инфляции ставка дисконтирования;

$\overline{H}$ — средний темп инфляции за исследуемый период.

Очищенная от инфляции ставка сравнения Q вычисляется по формуле

$$Q = Q_{безриск} + Q_{риск}, \tag{3.30}$$

где $Q_{безриск}$ — безрисковая часть ставки сравнения без учета инфляции; $Q_{риск}$ — рисковая часть ставки сравнения (премия за риск) без учета инфляции.

Как правило, ставка сравнения принимается постоянной на все время существования операции. Это справедливо, если входящие в нее составляющие слабо изменяются во времени. Например, если темп прироста инфляции H_t будет год от года изменяться очень резко, то выбор ставки сравнения постоянной на все время действия операции является недостаточно правомерным.

Представленная методика выбора ставки сравнения основана на общепринятых принципах, базирующихся на выборе безрисковой и рисковой частей этой ставки. Однако такой подход обладает некоторыми недостатками. Прежде всего, именно эти составляющие определяют чистую прибыль проекта, из которой осуществляются отчисления в резервный фонд, выделяется нераспределенная прибыль, производятся выплаты дивидендов, выплаты по кредитам, облигациям и т.д. Из приведенной методики непонятно, хватит ли для всех перечисленных отчислений полученной чистой прибыли. Поэтому представляется целесообразным в качестве составляющих ставки сравнения, очищенной от инфляции, использовать не ее безрисковую и рисковую части, а слагаемые, отвечающие за отчисления в резервный фонд, нераспределенную прибыль, дивиденды, выплаты по кредитам, облигациям и т.д.

Безрисковую часть ставки сравнения в России рассчитывают исходя из ставки межбанковского кредита без учета инфляции. За рубежом эту ставку определяют как доходность по безрисковым активам, также без учета инфляции. Безрисковая часть ставки составляет 1–3 %. За счет риска ставка сравнения увеличивается на величину, называемую *премией за риск*. Выбор премии за риск является весьма неопределенной задачей и зависит от степени риска проекта. Обычно премия за риск определяется экспериментально.

Например, можно воспользоваться следующими рекомендациями по выбору премии:

1) *замещающие* инвестиции:

• новые машины и оборудование, транспортные средства и т.д., которые будут выполнять те же функции, что и старое оборудование — премия за риск – 0 %,

• новые машины и оборудование, которые заменяют старое оборудование, но являются более совершенными, требуют более высокой квалификации работников, других производственных подходов и т.д. — премия за риск – 3 %,

• новые мощности, замещающие старые, новые заводы на том же или другом месте — премия за риск — 6 %;

2) *новые* инвестиции:

• новые мощности или связанное оборудование, с помощью которого будут производиться или продаваться те продукты, которые уже производились — премия за риск — 5 %,

• новые мощности или машины для производства или продажи производственных линий, которые тесно связаны с существующими производственными линиями — премия за риск — 8 %,

• новые мощности или машины, а также поглощение (приобретение) других форм для производства или продажи производственных линий, которые не связаны с первоначальной стоимостью компании — премия за риск — 15 %;

3) инвестиции в *НИР*:

• прикладные *НИР*, направленные на определенные специфические цели — премия за риск — 10 %,

• фундаментальные исследования, цели которых пока точно не определены, а результат точно неизвестен — премия за риск — 20 %.

При учете инфляции величина темпа прироста инфляции может быть взята из прогнозов, представленных в бюджете, или других официальных документов. Многие менеджеры проводят прогноз темпа прироста инфляции самостоятельно.

Поскольку предприниматель может использовать собственный капитал во внешних проектах и получать прибыль, то при использовании этого капитала в собственном проекте также необходимо учитывать его стоимость.

Пример 3.8. Ставка межбанковского кредита на момент формирования капитала составляет 18 % годовых при ожидаемом темпе прироста инфляции 15 % в год. Срок существования проекта — 10 лет. Ожидаемый темп прироста инфляции за эти годы:

$H_1 = 15\%$	$H_6 = 10\%$
$H_2 = 14\%$	$H_7 = 9\%$
$H_3 = 13\%$	$H_8 = 8\%$
$H_4 = 12\%$	$H_9 = 7\%$
$H_5 = 11\%$	$H_{10} = 6\%$

Определить ставку сравнения с учетом инфляции, а также ее величину, очищенную от инфляции. Считаем, что премия за риск, очищенная от инфляции, принимается равной 8 %.

Решение. Безрисковая часть ставки сравнения, очищенная от инфляции, $Q_{безриск} = 18 - 15 = 3\%$. По условию $Q_{риск} = 8\%$.

Темп прироста инфляции за весь срок проекта (3.17)

$$\overline{H} = \sqrt[10]{(1+0{,}15)(1+0{,}14)(1+0{,}13)\ldots(1+0{,}06)} - 1 = 0{,}1046 \text{ или } 10{,}46\ \%.$$

Ставка дисконтирования исследуемого проекта находится как сумма: $q \approx 3 + 8 + 10{,}46 = 21{,}46\%$. Обычно ставку сравнения округляют до целого числа. В нашем случае принимаем $q = 21\%$. ■

Рассмотрим метод сравнения современных стоимостей всех платежей контрактов на примере контракта на покупку товара в кредит, когда кредит погашается в конце срока, а проценты выплачиваются ежегодно.

Введем следующие обозначения:

V — цена товара;

n — срок кредита, включая льготный период;

t — льготный период;

i — ставка кредита;

q — ставка сравнения;

A — современная стоимость всех платежей;

I — проценты за льготный период.

В конце льготного периода t выплачиваются проценты I, которые при сложной процентной ставке кредита i по формулам (1.1) и (1.5) равны $I = V\left[(1+i)^t - 1\right]$. На эту суму к концу срока кредита начисляются проценты по ставке сравнения q. По окончании льготного периода в конце каждого из оставшихся лет выплачиваются проценты по кредиту в размере Vi, что соответствует годовой ренте с выплатами, равными Vi. По истечении срока контракта выплачивается полностью оговоренная в контракте цена товара V. Таким образом, сумма, наращенная за срок действия контракта, выражается соотношением:

$$S = I(1+q)^{n-t} + Vi(1+q)^{n-(t+1)} + Vi(1+q)^{n-(t+2)} + \ldots + Vi(1+q) + Vi + V\,.$$

Современная стоимость всех платежей определяется дисконтированием полученной наращенной суммы с дисконтным множителем $\frac{1}{(1+q)^n}$ и рассчитывается по формуле:

$$A = \frac{I}{(1+q)^t} + \sum_{j=t+1}^{n} \frac{Vi}{(1+q)^j} + \frac{V}{(1+q)^n}, \qquad (3.31)$$

которую после нескольких преобразований можно записать в виде:

$$A = \frac{V}{(1+q)^t}\left((1+i)^t - 1 + ia_{n-t;q} + \frac{1}{(1+q)^{n-t}}\right), \qquad (3.32)$$

где $a_{n-t;q} = \frac{1-(1+q)^{-(n-t)}}{q}$ – коэффициент приведения годовой ренты (2.9).

Пример 3.9. Существует два альтернативных контракта на покупку товара со следующими характеристиками:

• *контракт 1*: цена товара — 600 000 р.; срок кредита — 11 лет, из них льготный период составляет 3 года; проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода; ставка кредита — 12 %; основная задолженность погашается в конце срока; проценты выплачиваются ежегодно;

• *контракт 2*: цена товара — 601 000 р., срок кредита — 8 лет, из них льготный период составляет 2 года; проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода; ставка кредита — 11,5 %; основная задолженность погашается в конце срока; проценты выплачиваются ежегодно.

Выбрать контракт, наиболее приемлемый для покупателя при ставке сравнения 17 %.

Решение. Подставив в формулу (3.32) параметры контрактов, получим:

$$A_1 = \frac{600000}{(1+0{,}17)^3}\left((1+0{,}12)^3 - 1 + 0{,}12 \cdot \frac{1-(1+0{,}17)^{-(11-3)}}{0{,}17} + \frac{1}{(1+0{,}17)^{11-3}}\right) = 447512{,}56$$

$$A_2 = \frac{601000}{(1+0{,}17)^2}\left((1+0{,}115)^2 - 1 + 0{,}115 \cdot \frac{1-(1+0{,}17)^{-(8-3)}}{0{,}17} + \frac{1}{(1+0{,}17)^{8-3}}\right) = 446089{,}8$$

Так как $A_2 < A_1$, то для покупателя второй контракт предпочтительнее. ■

Метод определения предельных параметров контрактов. Сравнить контракты можно также методом определения предельных параметров контрактов, обеспечивающих конкурентоспособность.

Предельное значение параметра контракта – это такое значение параметра заменяющего контракта, при котором он оказывается равноценен (конкурентоспособен) заменяемому при прочих заданных параметрах этих контрактов.

Знание предельного значения параметра контракта позволяет оценить условия, при которых заменяющий контракт предпочтительнее заменяемого. Для определения предельного значения нужного параметра используется уравнение финансовой эквивалентности, в котором приравниваются современные стоимости платежей контрактов, найденные при помощи ставки сравнения. В некоторых случаях полезно использовать уравнение финансовой эквивалентности в виде:

$$A_1 - A_2 = 0, \qquad (3.33)$$

где A_1 и A_2 – современные стоимости платежей первого и второго контрактов соответственно.

Пример 3.10. Существуют два альтернативных контракта на покупку товара со следующими характеристиками:

- *контракт 1*: цена товара – 50 000 р.; срок выплаты – 5 лет; процентная ставка – 12 %;
- *контракт 2*: срок выплаты – 8 лет; процентная ставка – 15 %.

Определить предельное значение цены второго контракта при ставке сравнения 17 %.

Решение. При таких условиях уравнение финансовой эквивалентности принимает вид:

$$\frac{S_1}{(1+q)^{n_1}} = \frac{S_2}{(1+q)^{n_2}}, \text{ где } S_1 = P_1(1+i_1)^{n_1},\ S_2 = P_2(1+i_2)^{n_2},$$

при $P_1 = 50000$ р., $i_1 = 12\%$, $n_1 = 5$ лет, $i_2 = 15\%$, $n_2 = 8$ лет, $q = 17\%$.

Выражение неизвестного параметра P_2 из этого уравнения и даст искомое предельное значение.

$$P_{2,пр} = \frac{P_1(1+i_1)^{n_1}(1+q)^{n_2-n_1}}{(1+i_2)^{n_2}} = \frac{50000 \cdot 1{,}12^5 \cdot 1{,}17^{8-5}}{1{,}15^8} = 46\,135{,}48 \text{ р.}$$

Нетрудно сделать вывод, что при цене товара по второму контракту менее 46 135,48 р. этот контракт будет предпочтительнее первого. ■

Сравнение эффективности лизинга и кредита. Часто при возникновении необходимости приобрести определённое имущество (например, оборудование для предприятия) стоит проблема: что выгоднее, воспользоваться лизингом или купить оборудование в кредит? В данной ситуации можно применить метод сравнения современных стоимостей лизинга и долгосрочного кредита.

Пусть для приобретения оборудования по цене V предприниматель выбирает один из двух вариантов: лизинг сроком n_1 лет с годовыми выплатами R p_1 раз в год или кредит сроком n_2 лет, ставкой кредита b, авансом B с выплатой оставшейся суммы кредита в конце срока и ежегодными процентными выплатами по кредиту $(V-B)b$ p_2 раз в год. Ставка налога на прибыль равна g. Ставка сравнения равна q.

Современная стоимость платежей по лизингу, согласно формуле (2.22), равна:

$$A_л = R(1-g)a_{n_1;q}^{(p_1)}, \qquad (3.34)$$

где $a_{n_1;q}^{(p_1)}$ – коэффициент приведения годовой p_1-срочной ренты (2.23).

Современная стоимость платежей за кредит определяется выражением:

$$A_{пл} = (V - B)b(1 - g)a_{n_2;q}^{(p_2)} + \frac{V - B}{(1+q)^{n_2}}, \quad (3.35)$$

следующим из формул (2.22), (2.23), а современная стоимость кредита:

$$A_к = A_{пл} + B. \quad (3.36)$$

Иногда при сравнении современных стоимостей кредита и лизинга процентная ставка для дисконтирования принимается равной рыночной стоимости кредита.

Пример 3.11. Оборудование стоимостью 100 000 р. может быть предоставлено в аренду на срок 5 лет. Взносы выплачиваются в конце каждого месяца по 2500 р. С другой стороны, при покупке этого оборудования можно выплатить аванс в размере 20 000 р., а на оставшуюся сумму взять кредит на 4 года. Годовая ставка кредита 8 % годовых, проценты выплачиваются в конце каждого года, сумма кредита выплачивается в конце срока. Процентная рыночная кредитная ставка равна 12 %. Ставку налога на прибыль принять равной 24 %. Выбрать наиболее выгодный для покупателя метод приобретения оборудования.

Решение. Годовая выплата по лизингу $R = 2500 \cdot 12 = 30000$ р.

Современная стоимость выплат по лизингу по формуле (3.34):

$$A_л = 30000 \cdot (1 - 0,24) \cdot \frac{1 - 1,12^{-5}}{12 \cdot (1,12^{1/12} - 1)} = 86616,81 \text{ р.}$$

Современная стоимость платежей за кредит по формуле (3.35), упрощенной после подстановки $p = 1$:

$$A_{пл} = \frac{100000 - 20000}{1,12^4} \cdot \left(\frac{0,08}{0,12} \cdot (1 - 0,24)(1,12^4 - 1) + 1 \right) = 65615,11 \text{ р.}$$

Тогда современная стоимость покупки оборудования в кредит:

$$A_к = 65615,11 + 20000 = 85615,11 \text{ р.}$$

Расчёты показывают, что лизинг при заданных условиях обойдётся дороже, чем покупка оборудования в кредит. ■

Лабораторная работа № 3

1. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 12 000 р. через период k. Первоначальная сумма долга – 10 000 р. Определить доходность ссудной операции в виде простой годовой ставки наращения при временной базе *K*=360. Найти ставки эквивалентные исходной:

- сложную ставку,
- номинальную ставку при начислении процентов ежемесячно, ежеквартально, раз в полугодие,
- силу роста,
- учетную простую ставку,
- учетную сложную ставку.

Расчет провести для $k = k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$, где $k_1 = 120$ дней, $k_2 = 270$ дней,

$k_3 = 1$ год, $k_4 = 3{,}5$ года, $k_5 = 5$ лет. Проверить правильность расчетов, вычислив сумму, наращенную за эти периоды для найденных выше ставок.

2. Вычислить основные платежи, плату по процентам, общую ежегодную выплату и остаток долга (за каждый год) на примере ссуды 300 000 р. под годовую ставку 8 % на срок 10 лет при амортизации долга равными срочными уплатами и равными суммами основных выплат.

3. Ставка межбанковского кредита на момент формирования капитала составляет 18 % годовых при ожидаемом темпе прироста инфляции 15 % в год. Срок существования проекта — 10 лет. Ожидаемый темп прироста инфляции за эти годы:

$H_1 = 15\%$	$H_6 = 11\%$
$H_2 = 14\%$	$H_7 = 10\%$
$H_3 = 13\%$	$H_8 = 9\%$
$H_4 = 10\%$	$H_9 = 10\%$
$H_5 = 12\%$	$H_{10} = 6\%$

Премия за риск, очищенная от инфляции, принимается равной 8 %. Три альтернативных контракта на покупку товара имеют следующие характеристики:

• **контракт 1**: цена товара — 600 000 р.; срок кредита — 10 лет, из них льготный период составляет 3 года; проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода; ставка кредита — 12 %; основная задолженность погашается в конце срока; проценты выплачиваются ежегодно;

• **контракт 2**: цена товара — 601 000 р., срок кредита —.8 лет, из них льготный период составляет 2 года; проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода; ставка кредита — 11,5 %; основная задолженность погашается в конце срока; проценты выплачиваются ежегодно.

• **контракт 3**: цена товара — 590 000 р.; срок кредита — 9 лет, из них льготный период составляет 3 года; проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода; ставка кредита — 13 %; основная задолженность погашается в конце срока; проценты выплачиваются ежегодно;

Выбрать контракт, наиболее приемлемый для покупателя.

4. Пусть в условии предыдущей задачи неизвестны: ставка кредита второго контракта и цена товара третьего контракта. Определить их предельные значения, сравнивая эти контракты с первым. Сделать вывод о том, при каких значениях этих параметров второй и третий контракты будут выгоднее первого.

5. Оборудование стоимостью 100 000$ может быть предоставлено в аренду на срок 5 лет. Остаточная стоимость оборудования равна 20 000$, ставка лизинга – 18 %. Взносы выплачиваются в конце каждого месяца по 2500$. С другой стороны, при покупке этого оборудования можно выплатить аванс в размере 20 000$, а на оставшуюся сумму взять кредит на 4 года. Годовая ставка кредита 8 % годовых, проценты выплачиваются в конце каждого квартала, сумма кредита выплачивается в конце срока. Ставку налога на прибыль принять равной 24 %. Ставка сравнения равна 12 %, средний темп прироста

инфляции 3 %. Определить:

1. доходности лизингодателя и кредитора;
2. стоимости лизинга и кредита;
3. доходности лизингодателя и кредитора с учётом инфляции;
4. современные стоимости лизинга и кредита;
5. предельное значение взносов по лизингу;
6. предельное значение ставки по кредиту.

Выбрать наиболее выгодный для покупателя метод приобретения оборудования. Сделать вывод о предпочтительности одного вида приобретения оборудования по сравнению с другим на основании найденных предельных значений параметров контрактов.

Образец решения

1. При решении данной задачи можно предложить следующий вид оформления (рис. 3.2). В ячейках B2, B3 и B23:F30 установлен **денежный** формат, а в ячейках B13:F20 – **процентный**.

После ввода начальных данных в ячейки B2, B3, B4, B6:B10, можно приступать к вводу формул, позволяющих решить задачу. В ячейках B12:F12 найден временной период по отношению к временной базе K=360: в ячейку B12 введена формула =B6/B4, в ячейку C12 =B7/B4, а в ячейки C12:F12 скопированы значения ячеек B8:B10. Используя формулу (3.1), определим доходность ссудной операции в виде простой годовой ставки. Для этого в ячейку B13 вводим формулу =(($B$3/$B$2)-1)/B12.

Для расчета эквивалентных процентных ставок воспользуемся материалом, изложенным в параграфе 3.2. Найдем сложную годовую ставку по формуле (3.3): в ячейку B14 введём =(1+B12*B13)^(1/B12)-1; затем номинальную ставку по формуле (3.4) при разных m=12, 4 или 2: в ячейку B15 введём =12*((1+B14)^(1/12)-1), в ячейку B16 введём =4*((1+B14)^(1/4)-1), в ячейку B17 введём =2*((1+B14)^(1/2)-1). Силу роста вычисляем по формуле (3.5), опираясь на найденное значение сложной годовой ставки, вводим в B18 =LN(1+B14). Учетную простую ставку найдем по формуле (3.6), для этого в ячейку B19 вводим формулу =(1-(1+B14)^(-B12))/B12. Учетную сложную ставку можно найти по формуле (3.7), для этого в ячейку B20 введем =B14/(1+B14). Выделим диапазон B13:B20 и протянем его до столбца F.

Проверить правильность произведённых расчетов можно, найдя наращенную сумму при разных способах начисления процентов. Принцип использования формул (1.4)-(1.7), (1.12), (1.13) при расчете наращенной суммы рассмотрен в лабораторной работе №1. Рекомендуется самостоятельно выполнить проверку, в результате которой полученные значения должны быть одинаковы для всех видов ставок и равны заданной наращенной сумме, что говорит о том, что найденные процентные ставки действительно эквивалентны.

	A	B	C	D	E	F
1	Исходные данные					
2	Начальная сумма	10 000р.				
3	Наращенная сумма	12 000р.				
4	Временная база	360				
5	Срок					
6	k1=	120	дней			
7	k2=	270	дней			
8	k3=	1	год			
9	k4=	3,5	года			
10	k5=	5	лет			
11	Эквивалентные ставки	k1	k2	k3	k4	k5
12		0,33333	0,75	1	3,5	5
13	Простая ставка	60,00%	26,67%	20,00%	5,71%	4,00%
14	Сложная ставка	72,80%	27,52%	20,00%	5,35%	3,71%
15	Номинальная ставка начисление ежемесячно	55,96%	24,56%	18,37%	5,22%	3,65%
16	Номинальная ставка начисление ежеквартально	58,61%	25,06%	18,65%	5,24%	3,66%
17	Номинальная ставка начисление раз в полгода	62,91%	25,85%	19,09%	5,28%	3,68%
18	Сила роста	54,70%	24,31%	18,23%	5,21%	3,65%
19	Учетная ставка(простая)	50,00%	22,22%	16,67%	4,76%	3,33%
20	Учетная ставка(сложная)	42,13%	21,58%	16,67%	5,08%	3,58%
21	проверка					
22	Наращенная сумма	k1	k2	k3	k4	k5
23	Простая ставка	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.
24	Сложная ставка	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.
25	Номинальная ставка начисление ежемесячно	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.
26	Номинальная ставка начисление ежеквартально	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.
27	Номинальная ставка начисление раз в полгода	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.
28	Сила роста	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.
29	Учетная ставка(простая)	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.
30	Учетная ставка(сложная)	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.	12 000р.

Рис. 3.2

2. При составлении плана погашения задолженности равными срочными уплатами используются функции ПРПЛТ и ОСПЛТ. Функция ПРПЛТ возвращает сумму платежей процентов по инвестиции за данный период на основе постоянства сумм периодических платежей и постоянства процентной ставки. Функция ОСПЛТ возвращает величину платежа в погашение основной суммы по инвестиции за данный период на основе постоянства периодических платежей и постоянства процентной ставки. Функции ПРПЛТ и ОСПЛТ используются в формулах (3.9) и (3.12) для расчёта платы по процентам и размера выплат погашения долга за каждый год. Чтобы вычислить значение срочной уплаты воспользуемся функцией ПЛТ, реализующей формулу (3.11), и применим её в ячейке E8, в остальных ячейках диапазона E9:E18 контролируем постоянство ежегодных срочных уплат. Остаток долга вычисляем по формуле (3.13).

При заполнении таблицы в ячейках B4 и B8:E18 устанавливается **денежный** формат, а в ячейке B2 – **процентный**. Диапазон A8:A18 заполняется значениями от 0 до 10 как арифметическая прогрессия. Формулы, занесённые в ячейки B9:E9 (рис. 3.3) протягиваются до 18 строки.

	A	B	C	D	E
1	Исходные данные				
2	Ставка	0,08			
3	Срок	10	лет		
4	Размер ссуды	300000			
5					
6	Расчёт				
7	Год	Плата по процентам	Основная плата	Остаток долга	Срочная уплата
8	0			=B4	=ПЛТ(B2;B3;-B4)
9	1	=ПРПЛТ(B$2;A9;B$3;-B$4)	=ОСПЛТ(B$2;A9;B$3;-B$4)	=D8-C9	=B9+C9

Рис. 3.3

После выполнения получим:

	A	B	C	D	E
1	Исходные данные				
2	Ставка	8,00%			
3	Срок	10	лет		
4	Размер ссуды	300 000,00р.			
5					
6	Расчёт				
7	Год	Плата по процентам	Основная плата	Остаток долга	Срочная уплата
8	0			300 000,00р.	44 708,85р.
9	1	24 000,00р.	20 708,85р.	279 291,15р.	44 708,85р.
10	2	22 343,29р.	22 365,55р.	256 925,60р.	44 708,85р.
11	3	20 554,05р.	24 154,80р.	232 770,80р.	44 708,85р.
12	4	18 621,66р.	26 087,18р.	206 683,62р.	44 708,85р.
13	5	16 534,69р.	28 174,16р.	178 509,46р.	44 708,85р.
14	6	14 280,76р.	30 428,09р.	148 081,37р.	44 708,85р.
15	7	11 846,51р.	32 862,34р.	115 219,03р.	44 708,85р.
16	8	9 217,52р.	35 491,32р.	79 727,71р.	44 708,85р.
17	9	6 378,22р.	38 330,63р.	41 397,08р.	44 708,85р.
18	10	3 311,77р.	41 397,08р.	0,00р.	44 708,85р.

Рис. 3.4

Самостоятельно составить план погашения задолженности равными суммами основных выплат по долгу. Рекомендуется использовать формулы (3.8)-(3.10) и пример 3.5.

3. Прежде чем проводить анализ контрактов, необходимо найти ставку сравнения, опираясь на темп прироста инфляции по годам, ставку межбанковского кредита, премию за риск, ожидаемый темп прироста инфляции.

Введем в диапазон B3:B12 темп прироста инфляции по годам. В ячейку C3 введем формулу =1+B3. Копируем формулу до ячейки C12. Используя формулу (3.16), найдем индекс цен за 10 лет, следующих друг за другом. Для этого введем в ячейку C14 формулу =ПРОИЗВЕД(C3:C12). Средний темп инфляции рассчитаем по формуле (3.17), в C15 = (C14)^(1/10)-1.

Рассчитаем теперь ставку сравнения, используя очищенную от инфляции ставку дисконтирования, средний темп инфляции за исследуемый период. Безрисковую часть ставки сравнения без учета инфляции можно найти, если отнять от межбанковского кредита ожидаемый темп инфляции. Таким образом, введем в ячейку B17 значение межбанковского кредита, в ячейку B18 – ожидаемый темп инфляции. Безрисковую часть ставки сравнения без учета инфляции найдем с помощью ввода формулы =B17-B18 в ячейку B19. Рисковая часть ставки сравнения задана в условии. Ставку дисконтирования рассчитаем по формуле (3.29), для этого в ячейку B21 введем в формулу =(1+B19+B20)*(1+C15)-1.

Для нахождения наилучшего для покупателя контракта необходимо пользоваться формулой (3.32). Для каждого контракта вводим цену товара, льготный период, общий срок кредита, ставку кредита и в итоге рассчитываем современную стоимость всех платежей. В диапазон B23:E25 введем исходные данные по каждому контракту, в ячейку F23 формулу

=(B23/(1+$B$21)^C23)*((1+E23)^C23-1+ПС($B$21;D23-C23;-E23)+1/((1+$B$21)^(D23-C23)))

Введённую формулу копируем на ячейки F24, F25.

Наилучшим считается тот контракт, который имеет наименьшую современную стоимость. Для автоматизации принятия решения по выбору контракта можно в ячейку F27 ввести формулу, используя функцию ЕСЛИ раздела **логические Мастера функций**:

=ЕСЛИ(МИН(F23:F25)=F23;"1";ЕСЛИ(МИН(F23:F25)=F24;"2";"3")).

Оформление рабочего листа с решением задачи 3 представлено на рис. 3.5. Рекомендуется самостоятельно выбрать и установить нужный формат в соответствующих ячейках.

	A	B	C	D	E	F
1	**Инфляция**					
2	Темп прироста инфляции					
3	1 год	15%	1,15			
4	2 год	14%	1,14			
5	3 год	13%	1,13			
6	4 год	10%	1,10			
7	5 год	12%	1,12			
8	6 год	11%	1,11			
9	7 год	10%	1,10			
10	8 год	9%	1,09			
11	9 год	10%	1,10			
12	10 год	6%	1,06			
13						
14	**Индекс цен**		2,83			
15	**Средний темп инфляции**		11%			
16	**Ставка дисконтирования**					
17	межбанковский кредит	18%				
18	ожидаемый темп инфляции	15%				
19	безрисковая	3%				
20	рисковая	8%				
21	**ставка сравнения**	23%				
22		**цена товара**	**льготный период**	**срок кредита, включая льготный**	**ставка кредита**	**современная стоимость всех платежей**
23	**1 контракт**	600 000,00р.	1	10	12,0%	346 610,44р.
24	**2 контракт**	601 000,00р.	2	8	11,5%	349 994,94р.
25	**3 контракт**	590 000,00р.	3	9	13,0%	356 547,49р.
26						
27	**Вывод: наиболее приемлемый для покупателя контракт 1**					

Рис. 3.5

4. Для выполнения этой задачи воспользуемся уже полученными результатами предыдущей.

- Скопировать в диапазон A1:F5 листа этой задачи диапазон A21:F25 задачи 3. При копировании ставки сравнения нужно выбрать формат вставки **только**

значения, а в формулах диапазона F3:F5 изменить ссылку с \$B\$22 на \$B\$1.

- Удалить значения из ячеек E4 и B5.
- В ячейку F8 ввести формулу, выражающую уравнение финансовой эквивалентности (3.33) для первого и второго контрактов =F3-F4, а в ячейку F10 – =F3-F5 – уравнение финансовой эквивалентности (3.33) для первого и третьего контрактов. Вид таблицы на этом этапе представлен на рис. 3.6.

	A	B	C	D	E	F
1	ставка сравнения	23%				
2		цена товара	льготный период	срок кредита, включая льготный период	ставка кредита	современная стоимость всех платежей
3	**1 контракт**	600 000,00р.	1	10	12,0%	346 610,44р.
4	**2 контракт**	601 000,00р.	2	8		113 392,57р.
5	**3 контракт**		3	9	13,0%	0,00р.
6						
7						
8	**уравнение эквивалентности 1 и 2 контрактов**					233 217,87р.
9						
10	**уравнение эквивалентности 1 и 3 контрактов**					346 610,44р.

Рис. 3.6

Для отыскания предельных значений неизвестных параметров выполнить **Сервис-Подбор параметра**:

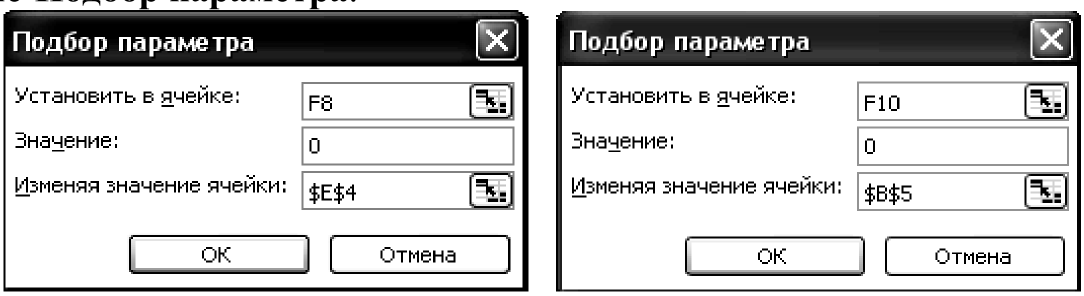


Рис. 3.7

На основе полученных результатов делаем вывод, введя в ячейку H12 формулу =E4, а в ячейку H14 – =B5. Окончательный результат представлен на рис. 3.8. Отформатировать итоговую таблицу рекомендуется самостоятельно.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ставка сравнения	23%						
2		цена товара	льготный период	срок кредита, включая льготный период	ставка кредита	современная стоимость всех платежей		
3	**1 контракт**	600 000,00р.	1	10	12,0%	346 610,44р.		
4	**2 контракт**	601 000,00р.	2	8	11,3%	346 610,44р.		
5	**3 контракт**	573 556,60р.	3	9	13,0%	346 610,44р.		
6								
7								
8	**уравнение эквивалентности 1 и 2 контрактов**					0,00р.		
9								
10	**уравнение эквивалентности 1 и 3 контрактов**					0,00р.		
11								
12	**Вывод:**	**2 контракт выгоднее первого, если ставка кредита меньше**						**11,34%**
13								
14		**3 контракт выгоднее первого, если цена товара меньше**						**573 556,60р.**

Рис. 3.8

5. Решить эту задачу самостоятельно. Возможный вариант решения представлен на рис. 3.9. При решении использованы формулы: в ячейке B13 – (3.25), в ячейке B14 – (3.28), в ячейке E13 – (3.23), в ячейке E19 – (3.26), в ячейке B20 – (3.20), в ячейке E20 – (3.20),в ячейке B21 – (3.34), в ячейке E21 – (3.35)-(3.36). В ячейках B15 и E15 используется уравнение (3.33) и формулы (3.35)-(3.36) со ссылкой на неопределённое значение неизвестного параметра. Значения в ячейках: B18, E18, B19, B22, E22 определяются **Подбором параметра**. Выводы автоматизируются.

	A	B	C	D	E	F
1	Исходные данные					
2	Ставка налога на прибыль	24,00%		Ставка сравнения	12,00%	
3	Стоимость оборудования	100 000,00 $		Средний темп прироста инфляции	3,00%	
4						
5	ЛИЗИНГ			КРЕДИТ		
6	Срок	5	лет	Аванс	20 000,00 $	
7	Взносы	2 500,00 $		Срок погашения	4	года
8	Количество взносов в год	12		Ставка кредита	8,00%	
9	Остаточная стоимость	20 000,00 $		Количество выплат в год	4	
10	Ставка лизинга	18,00%				
11						
12	Вспомогательные расчёты					
13	Уравнение финансовой эквивалентности для расчёта доходности лизингодателя	0,0000001994		Уравнение финансовой эквивалентности для расчёта доходности кредитора	0,0000263917	
14	Уравнение финансовой эквивалентности для расчёта стоимости лизинга	-0,0000135635				
15	Уравнение финансовой эквивалентности для определения предельного значения взносов по лизингу	0,0000000000		Уравнение финансовой эквивалентности для определения предельного значения ставки по кредиту	-0,0000003249	
16						
17	Окончательные результаты и выводы					
18	**Доходность лизингодателя**	**23,88%**		**Доходность кредитора**	**8,24%**	
19	**Стоимость лизинга**	**9,52%**		**Стоимость кредита**	**6,08%**	
20	**Доходность лизингодателя с учётом инфляции**	**20,27%**		**Доходность кредитора с учётом инфляции**	**5,09%**	
21	**Современная стоимость лизинга с учётом налоговой защиты**	**86 616,81 $**		**Современная стоимость кредита с учётом налоговой защиты**	**86 264,24 $**	
22	**Предельное значение взносов по лизингу**	**2 489,82 $**		**Предельное значение ставки по кредиту**	**8,18%**	
23						
24	**В данной ситуации выгоднее использовать кредит**					
25						
26	**Лизинг выгоднее при взносах меньше**		**2 489,82 $**	**, в противном случае выгоднее кредит**		
27						
28	**Кредит выгоднее при ставке кредита меньше**		**8,18%**	**, в противном случае выгоднее лизинг**		

Рис. 3.9

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

1. Эквивалентные ставки. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме S р. через период k. Первоначальная сумма долга – P р. Определить доходность ссудной операции в виде простой годовой ставки наращения при временной базе K=360. Найти ставки эквивалентные исходной:

- сложную ставку,

- номинальную ставку при начислении процентов ежемесячно, ежеквартально, раз в полугодие,
- силу роста,
- учетную простую ставку,
- учетную сложную ставку.

Расчет провести для $k = k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$. Проверить правильность расчетов, определив наращенную сумму для найденных выше ставок при первоначальной сумме долга P р.

2. План погашения задолженности. Вычислить основные платежи, плату по процентам, общую ежегодную выплату и остаток долга (за каждый год) на примере ссуды S р. под годовую ставку i % на срок $k = \max\limits_{1 \le i \le 5}\{k_i\}$ лет при амортизации долга равными срочными уплатами и равными суммами основных выплат.

3. Сравнение контрактов. Ставка межбанковского кредита на момент формирования капитала составляет i % годовых при ожидаемом темпе прироста инфляции j % в год. Срок существования проекта $n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ лет. Ожидаемый темп прироста инфляции за эти годы: $H_1, H_2, ..., H_n$. Премия за риск, очищенная от инфляции, принимается равной l %. Три альтернативных контракта на покупку товара имеют следующие характеристики:

• **контракт *k***: цена товара S_k тыс. \$; срок кредита n_k лет, из них льготный период составляет m_k года; проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода; ставка кредита i_k %; основная задолженность погашается в конце срока; проценты выплачиваются ежегодно; $k = 1,2,3$.

Выбрать контракт, наиболее приемлемый для покупателя.

4. Определение предельных значений параметров контрактов. Пусть в условии предыдущей задачи неизвестны: ставка кредита второго контракта и цена товара третьего контракта. Определить их предельные значения, сравнивая эти контракты с первым. Сделать вывод о том, при каких значениях этих параметров второй и третий контракты будут выгоднее первого.

5. Сравнение эффективности лизинга и кредита. Оборудование стоимостью S_1 тыс. \$ может быть предоставлено в аренду на срок $n = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ лет. Остаточная стоимость оборудования равна $W = \dfrac{S_1}{n_1}$ тыс. \$, ставка лизинга j %. Взносы выплачиваются m_1 раз в год по R сот. \$. С другой стороны при покупке этого оборудования можно выплатить аванс в размере $B = \dfrac{S_1}{n_2}$ тыс. \$, а на оставшуюся сумму взять кредит на n_2 лет. Ставка кредита равна l % годовых, проценты по кредиту выплачиваются m_2 раз в год, сумма кредита выплачивается в конце срока. Ставку налога на прибыль принять равной i_3 %. Срок существования проекта и ожидаемые темпы прироста инфляции за эти годы совпадают с условиями задачи 3 и по ним уже вычислены ставка сравнения и средний темп прироста инфляции. Определить:

- доходности лизингодателя и кредитора;
- стоимости лизинга и кредита;
- доходности лизингодателя и кредитора с учётом инфляции;
- предельное значение взносов по лизингу;
- предельное значение ставки по кредиту;
- современные стоимости лизинга и кредита.

Выбрать наиболее выгодный для покупателя метод приобретения оборудования. Сделать вывод о предпочтительности одного вида приобретения оборудования по сравнению с другим на основании найденных предельных значений параметров контрактов.

Данные по вариантам

№ вар.	S, р.	P, р.	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	i, %
1	100000	50000	123 дня	250 дней	1 год	6 лет	3,5 года	17
2	120000	80000	120 дней	315 дней	1,5 года	2 года	5 лет	12,5
3	25000	10000	214 дней	300 дней	1 год	5 лет	6,5 лет	15
4	500000	40000	250 дней	300 дней	1,5 года	2 года	3 года	13,5
5	25000	10000	120 дней	270 дней	2 года	3 года	5 лет	15
6	50000	24000	189 дней	230 дней	1,5 года	2,5 года	3 года	16,5
7	500000	250000	256 дней	303 дней	10 лет	8 лет	7 лет	12
8	60000	20000	233 дней	191 дней	9 лет	7 лет	5 лет	13
9	95000	22000	177 дней	336 дней	8 лет	2 года	7,5 лет	15
10	500000	120000	349 дней	352 дней	4 года	7,5 лет	2 года	14,5
11	27000	9000	343 дней	189 дней	1 год	2,5 года	1,5 года	17
12	30000	5000	211 дней	143 дней	3 года	7 лет	5 лет	18
13	238300	47660	211 дней	143 дней	3 года	7 лет	5 лет	17,5
14	33300	3330	189 дней	178 дней	1,5 года	4 года	1 год	14
15	293500	14670	288 дней	203 дней	3 года	4 года	5 лет	15
16	281900	56380	289 дней	287 дней	8 лет	6 лет	4 года	12
17	65000	6500	193 дней	306 дней	8 лет	7 лет	2,5 года	18
18	281400	14070	296 дней	285 дней	4 года	9 лет	8,5 года	11
19	150500	16723	252 дней	227 дней	2 года	10 лет	3 года	19
20	275900	13950	278 дней	167 дней	10 лет	3 года	1,5 года	10,5
21	87300	8730	160 дней	359 дней	7 лет	1,5 года	6 лет	11
22	85200	12172	135 дней	331 дней	3 года	8 лет	1 год	15
23	178700	22338	189 дней	276 дней	3 года	6 лет	5 лет	19
24	259500	28834	255 дней	335 дней	6 лет	5,5 года	9 лет	8
25	140000	15556	199 дней	360 дней	10 лет	4 года	6,5 года	18

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
R, сот. $	3,2	1,7	17	50	3,3	7,9	17	5,5	26	7,3	11	12	20	1,7	3	10	15	17	31	57	7	4	31	5,5	9,5
j, %	15	10	10	12	10	9	11	8	14	7	15	7	7	11	10	10	14	8	15	14	10	11	13	15	12
l, %	8	7,5	5	6	3	8	3	4	5	6	7	7	8	9	7,5	6	10	5	6	5	8	5	8	6	5
S_1, тыс.$	6	5,2	15	80	5	12	75	10	52	15	25	25	35	2,5	12	10	50	65	56	57	12	12	50	10	25
i_1, %	12	12	12	10	10	12	12	12	11	15	12	12	12	12	10	11	12	12	11	11	11	14	10	10	11
n_1, лет	10	12	8	7	8	7	10	9	9	10	10	10	8	10	10	11	10	12	8	9	8	9	7	9	8
m_1, года	2	3	1	2	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	4	1	3	3	2	1	2	3	2	2	3
S_2, тыс.$	6,2	5,2	16	75	7,5	13	77	12	60	14	20	24	34	2,4	11	12	77	70	60	61	15	10	45	13	20
i_2, %	11	11	11	13	12	11	13	12	11	11	12	13	10	10	11	13	10	13	12	12	12	11	14	11	15
n_2, лет	9	10	7	9	10	5,5	11	11	8	12	9	11	9	12	12	10	9	10	10	8	10	10	8	10	10
m_2, года	2,5	2	2	1	2	2	1	3	2	3	3	3	3	3	1	2	2	2	3	3	3	1	2	3	2
S_3, тыс.$	5,9	5,1	14	82	5,2	11	60	14	65	13	22	26	33	2,6	14	14	45	59	50	58	10	13	52	9,8	27
i_3, %	15	13	12	9	9	14	14	13	10	12	14	13	15	11	10	10	16	17	13	12	18	10	8	12	12
n_3, лет	8,5	11	6	8	7	6	12	10	10	11	8	12	7	11	11	9	8	9	9	7	9	8	9	7	11
m_3, года	3	4	2	3	1	3	2	4	3	2	4	4	1	4	3	3	1	1	2	3	1	2	1	2	4
H_1, %	6	11	10	9	10	12	12	10	12	10	11	8	11	14	11	12	6	2	12	6	12	5	11	9	5
H_2, %	7	12	11	8	11	11	12	14	13	13	12	5	11	12	10	13	5	5	11	9	10	4	12	9	5
H_3, %	8	10	12	7	12	10	10	12	11	10	13	6	13	11	12	11	6	8	12	8	10	6	11	8	6
H_4, %	8,5	12	10	10	11	9	14	10	10	10	14	9	11	11	12	10	3	6	13	5	9	3	10	11	8
H_5, %	9	10	11	11	10	8	5	11	9	12	13	10	14	10	13	14	4	8	10	7	11	3	14	7	9
H_6, %	9,5	10	12	12	9	7	13	12	8	13	14	4	1	13	10	8	2	6	9	9	10	5	13	11	10
H_7, %	10	9	8	12	8	6	12	14	7	10	12	6	11	11	10	9	4	9	11	9	14	3	12	10	7
H_8, %	9	6		11	7		10	13	9	13	14	7	14	14	11	12	5	7	14	5	11	4	12	12	8
H_9, %	7	8		9	6		10	13	10	12	13	12	11	15	14	10	6	8	12	8	16	6	11	13	9
H_{10}, %	12	11			10		7	11	11	14	12	12		10	12	11	3	8	12	6	13	6	14	9	9
H_{11}, %		12					7	12		10		11		10	13			9							11
H_{12}, %		12					8			10		10		11	11			10							

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

i – ставка наращения (простая или сложная в зависимости от срока), доходность финансовой операции
j – номинальная ставка наращения
δ – сила роста
d – учётная ставка (простая или сложная, в зависимости от срока)
S – наращенная сумма (будущая стоимость)
P – современная стоимость (приведённая, текущая)
I – проценты
n – срок операции в годах
m – количество начислений процентов в год
R – размер годовой выплаты по ренте
A – современная стоимость потока платежей (контракта) или сумма кредита
p – количество выплат по ренте (по контракту, по кредиту) в год
C – обесцененная инфляцией наращенная сумма
$\overline{H}$ – средний темп прироста инфляции за период
I_p – индекс цен
r – брутто-ставка
a – реальная или желаемая доходность
$i_{кр}$ – критическая ставка
q – ставка сравнения
b – ставка долгосрочного кредита
f – ставка лизинга
$i_л$ – доходность лизингодателя
$i_к$ – доходность кредитора
g – ставка налога на прибыль
$\tilde{i}_л$ – стоимость лизинга
$\tilde{i}_к$ – стоимость кредита
V – стоимость товара или оборудования
W – остаточная стоимость оборудования

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов Б.Т. Математические методы финансового анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009.
2. Малыхин В.И. Финансовая математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009.
3. Гарнаев А.Ю. Excel, VBA, Internet в экономике и финансах. СПб.: БХВ-Петербург, 2010.
4. Бухвалов А.В., Бухвалова В.В., Идельсон А.В. Финансовые вычисления для профессионалов. СПб.: БХВ-Петербург, 2010.